Ejercicios Teóricos 5
Series y Transformada de Fourier

1 Bases Ortogonales. Coeficientes de Fourier

1.1 Espacios de Dimensión Finita

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ una base ortogonal. Comprobar que dado un vector $\vec{v} \in V$ puede representarse a través de

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle} \, \mathbf{e}_i$$

2. Sea $W \subset V$ un subespacio de V. Sea $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m\}$ bases ortogonales de V y W, respectivamente. Sea $\vec{v} \in V$. Demostrar que el vector $w \in W$ "más parecido" a $\vec{v}$ es

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle} \, \mathbf{e}_i$$

En virtud de que el espacio es Euclidiano, dar una definición precisa para decir que dos vectores son "parecidos".

3. Dado un espacio $W \subset V$ un subespacio V. Sea $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m\}$ una base ortogonal de W. Demostrar que dado $\vec{x} \in V$,

$$\left|\left| \vec{x} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle} \mathbf{e}_i \right|\right| \leq ||\vec{x} - \vec{w}||$$

para todo $\vec{w} \in W$

1.2 Espacios de Dimensión Infinita

4. *Convergencia en Media.* La serie formal

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$$

se dice que *converge en media a* $\vec{x}$ si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} \left|\left| \vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \right|\right| = 0$$

Demostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ converge en media a un vector $\vec{x}$, entonces $\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle}$.

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar

Pista: Partir de la desigualdad demostrada en el ejercicio 4 y la convergencia en media de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ a $\vec{x}$

5. *Desigualdad de Bessel*. Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ un conjunto ortonormal de vectores en el espacio euclídeo V, de dimensión infinita. Sea $\vec{x} \in V$. Entonces

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle^2 \leq ||\vec{x}||^2$$

que es la desigualdad denominada desigualdad de Bessel. Obtener además, la desigualdad de Bessel para el caso en que la base sea ortogonal.
Pista: Partir de

$$0 \leq \left|\left| \vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle \right|\right|^2$$

desarrollar el cuadrado (como el producto interno del vector diferencia por sí mismo), comprobando que

$$\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle \mathbf{e}_i \right) | \left(\sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{e}_j | \vec{x} \rangle \mathbf{e}_j \right) \rangle = \langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle^2$$

6. Igualdad de Parseval. Asumiendo que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ es una base ortonormal de V, demostrar que se cumple

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle^2 = ||\vec{x}||^2$$

Pista: Como se supone que es una base, la serie formal converge en media

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \vec{x} - \sum_{\ell=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \vec{x} \rangle \right\|^2 = 0$$

y hacer un razonamiento análogo al hecho en el ejercicio anterior. Obtener la igualdad de Parseval para el caso de base ortogonal.

2 Convergencia Puntual

2.1 El Teorema de Riemann - Lebesgue

7. Sea $g(t)$ una función continua a trozos en en intevalo $[a, b]$. Demostrar (el Teorema de Riemann-Lebesgue)

$$\lim_{s \to \infty} \int_a^b g(t) \sin(s\, t + \xi)\, dt = 0$$

Pista: Utilizar el hecho que $g(t) \leq |g(t)| \leq M$, si la función está acotada en $[a, b]$

2.2 Los Teoremas de Fourier

8. Demostrar que la suma parcial de Fourier para la función $f(x)$ se puede expresar como

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} [a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x)\, dx$$

donde el *kernel* $K_n(t-x)$ es

$$K_n(t-x) = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} \cos[\ell(t-x)]$$

9. Demostrar que el *Kernel* $K_n(s)$ se puede escribir,

$$K_n(s) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})s)]}{2\sin(\frac{s}{2})}$$

Pista: Aplicar la identidad trigonométrica

$$\sin\left[\left(\ell + \frac{1}{2}\right) s\right] - \sin\left[\left(\ell - \frac{1}{2}\right) s\right] = 2\sin\left(\frac{s}{2}\right)\cos(\ell s)$$

con lo que

$$\cos(\ell s) = \frac{\sin\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right)s\right] - \sin\left[\left(\ell-\frac{1}{2}\right)s\right]}{2\sin\left(\frac{s}{2}\right)}$$

para luego sumar en la suma parcial.

10. Demostrar que el Kernel satisface las siguientes propiedades

a) $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)\, dt = \pi$

b) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)\, dt = \pi$

c) $K_n(t-x)$ es una función par de t

d) $\lim_{n\to\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(t-x)\, dt = \pi, \forall \varepsilon > 0$

e) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{x} K_n(t-x)\, dt = \frac{\pi}{2}$

f) $\lim_{n\to\infty} \int_{x}^{\pi} K_n(t-x)\, dt = \frac{\pi}{2}$

Pistas: Para a), b) y c) usar la definición original, de la suma parcial. Para d), e) y f) usar la expresión del ejercicio anterior para separar en integrales y analizar dónde se puede aplicar el Teorema de Riemann - Lebesgue.

2.2.1 El Teorema 1 de Fourier

Teorema 1 de Fourier. Sea $f(x)$ una función **continua en** $[-\pi,\pi]$ **y derivable en** $(-\pi,\pi)$. *Entonces, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

en $(-\pi,\pi)$. Además, si $f(-\pi) = f(\pi)$ entonces, la serie converge en $[-\pi,\pi]$.

11. Demostrar el Teorema 1 de Fourier. Notar que este teorema tiene dos partes: La primera es la convergencia en el abierto y la segunda es comprobar que $\lim_{n\to\infty} S_n(\pm\pi) = f(\pm\pi)$

Pistas:

a) Para la primera parte
i) Expresar la suma parcial $S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(t-x)\,dx$
ii) Sumar y restar convenientemente $S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-f(x)+f(x)]\,K_n(t-x)\,dx$
iii) Distribuir en el integrando y expresar $S_n = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-f(x)]\,K_n(t-x)\,dx$
iv) Escribir

$$
\begin{aligned}
S_n &= f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-f(x)]\,\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{2\sin(\frac{t-x}{2})}\,dx \\
&= f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[f(t)-f(x)]}{2\sin(\frac{t-x}{2})}\,\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]\,dx
\end{aligned}
$$

iv) Demostrar que como f es derivable en $(-\pi,\pi)$ la función

$$
g(t) = \frac{[f(t)-f(x)]}{2\sin(\frac{t-x}{2})}, \qquad \Big(\text{se tiene entonces } \lim_{t\to x} g(t) = f'(x)\Big)
$$

está acotada siempre en $(-\pi,\pi)$, (aún en $t\to x$). Tomar $\lim_{n\to\infty} S_n$ y aplicar el Teorema de Riemann-Lebesgue.

b) Para la segunda parte hacer análisis similar, pero separando las integrales y sumando y restando en cada integrando convenientemente. Aplicar paridad de K_n y llegar a

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{f(-\pi)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(t)-f(-\pi)]\,\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{2\sin(\frac{t-x}{2})}\,dt + \\
&+ \frac{f(\pi)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(t)-f(\pi)]\,\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{2\sin(\frac{t-x}{2})}\,dt
\end{aligned}
$$

Evaluar en π y en $-\pi$ la suma parcial y tomar límite y notar que queda el promedio de los valores en $\pm\pi$ que si los valores coinciden, dará el resultado buscado. Aplicar el Teorema de Riemann-Lebesgue justificando que se cumplen las hipótesis. (Va a ser necesario pedir que existan las derivadas laterales de f en $x=\pm\pi$).

2.2.2 El Teorema 2 de Fourier

Teorema 2 de Fourier. Sea $f(x)$ una función **continua en $[-\pi,\pi]$ y derivable en $(-\pi,\pi)$, salvo en un número finito de puntos** *en los cuales existen los límites laterales (aunque no coincidan).*

$$
f'^{\pm}(x_0) = \lim_{t\to x_0^{\pm}} \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}
$$

Entonces, se cumple

$$
\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)
$$

en $(-\pi,\pi)$.

12. Demostrar el Teorema 2 de Fourier. Notar que extiende la convergencia a funciones continua, pero condiscontinuidades en la derivada.

Pista: Aplicar el mismo razonamiento para la demostración del *Teorema 1* haciendo notar que se puede aplicar el Teorema de Riemann-Lebesgue aún en el punto de discontinuidad de la derivada, en virtud de la existencia de las derivadas laterales.

2.2.3 El Teorema 3 de Fourier

Teorema 3 de Fourier. Sea $f(x)$ una función **continua a trozos en** $[-\pi, \pi]$ **y derivable en** $(-\pi, \pi)$**, salvo en un número finito de puntos** *en los cuales existen los límites laterales (aunque no coincidan).*

$$f'^{\pm}(x_0) = \lim_{t \to x_0^{\pm}} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

Además, en los puntos de discontinuidad de la función, también existen los límites laterales. Entonces,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$$

en donde la función es continua y en los puntos de discontinuidad, x_0,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

donde $f(x_0^{\pm}) = \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$.

13. Demostrar el Teorema 3 de Fourier. Notar que es la extensión de la convergencia puntual de la serie de Fourier para funciones discontinuas.
Pista: Para la demostración de este Teorema, es conveniente expresar la suma parcial separando la integración como sigue:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{x_0} f(t)\, K_n(t - x)\, dx + \int_{x_0}^{\pi} f(t)\, K_n(t - x)\, dx \right\}$$

donde x_0 es el punto de discontinuidad. Una vez expresado de esta manera, escribir

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x_0} \left[f(t) - f(x_0^-) + f(x_0^-) \right] \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})(t - x)]}{2 \sin(\frac{t-x}{2})}\, dx \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\pi} \left[f(t) - f(x_0^+) + f(x_0^+) \right] \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})(t - x)]}{2 \sin(\frac{t-x}{2})}\, dx \end{aligned}$$

Luego evaluar la suma parcial en x_0 y tomar límite para $n \to \infty$ asumiendo las hipótesis el teorema.

3 Transformadad e Fourier

3.1 Construcción

14. Hallar los coeficientes de la forma compleja de Fourier para funciones continua a trozos en el intervalo $[-p, p]$

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell\, e^{i \frac{n \pi x}{L}}$$

15. Definiendo $\omega = \frac{\ell\pi}{L}$ y $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$ comprobar que la expresión compleja de la serie de Fourier se puede escribir

$$f(x) = \sum_{\omega} F(\omega) e^{i\,\omega\,x} \Delta\omega, \qquad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} f(x)\, e^{-i\,\omega\,x} dx$$

16. Tomando los límites adecuados, demostrar la expresión de la *Integral de Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)}\, dt$$

17. A partir de la *Integral de Fourier*, demostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-t)}\, d\omega = \delta(x-t)$$

Definición de Transformada de Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\,\omega\,t} dt$$

3.2 Propiedades

18. Sea $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$ la transformada de Fourier de $f(x)$, demostrar

a) $\mathcal{F}[f(-x)] = F(-\omega)$

b) $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{F(\omega/a)}{|a|}$, $(a \neq 0)$

c) $\mathcal{F}[f(x + x_0)] = e^{i\omega x_0} F(\omega)$

d) $\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega)$

e) $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n F(\omega)$

f) $\mathcal{F}[x^n f(x)] = i^n F^{(n)}(\omega)$

g) $\mathcal{F}[F(x)] = f(-\omega)$

h) $\mathcal{F}[f(x) e^{i\omega_0\, x}] = F(\omega - \omega_0)$, $(\omega_0 \in \mathbb{R})$

3.2.1 Convolución

19. Sean $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$ y $G(\omega) = \mathcal{F}[g(x)]$ las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Demostrar

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)] = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

20. Sean $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$ y $G(\omega) = \mathcal{F}[g(x)]$ las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Demostrar

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] = (F * G)(\omega)$$

3.3 Identidades de Parseval

21. Sean $F(\omega)$ y $G(\omega)$ las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Probar que se cumple

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

c)

$$\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\infty} F_{\sin}(\omega)\overline{G_{\sin}}(\omega)d\omega \quad \text{para transformada de senos}$$

d)

$$\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\infty} F_{\cos}(\omega)\overline{G_{\cos}}(\omega)d\omega \quad \text{para transformada de cosenos}$$