Ejercicios Teóricos 4
Puntos Ordinarios y Singulares Regulares

1 Puntos Ordinarios y Singulares Regulares

1 Ecuación de Euler. Dada la ecuación de Euler

$$x^2\, y''(x) + \alpha\, x\, y'(x) + \beta\, y(x) = 0$$

la cual se puede definir a través del operador lineal

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\, x \frac{d}{dx} + \beta$$

(donde las soluciones serán el núcleo del operador). Demostrar que

$$L(x^r) = p(r)\, x^r, \qquad \text{donde } p(r) = r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta$$

Describir los tipos de soluciones posibles.

2. Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) = 0$$

dar la definición de punto ordinario y punto singular regular. Qué tipo de singularidades deberían tener las funciones $\frac{Q(x)}{P(x)}$ y $\frac{R(x)}{P(x)}$ para que el punto x_0 sea singular regular? Cómo deberían ser sus series de Laurent?

3 Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) = 0$$

describir el método de Frobenius. Determinar la expresión de los coeficientes para las series y describir los tipos de soluciones posibles a partir de las posibles raíces del polinomio indicial.

4. Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) = 0$$

con $x = 0$ punto singular regular, definamos el operador

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \left[x \frac{Q(x)}{P(x)}\right] \frac{d}{dx} + \left[x^2 \frac{R(x)}{P(x)}\right] y$$

Demostrar que

$$L\left[y_r(x)\right] = x^r\, y_r(x)$$

donde $y_r(x)$ es la propuesta de solución dada por el método de Frobenius y $p(r)$ es el polinomio indicial.

5. Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) = 0$$

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar

describir las relaciones que deben satisfacerse para que el punto infinito sea un punto ordinario. Hacer el análisis para que el punto en el infinito sea singular regular.

6. Escribir una ecuación diferencial lineal de segundo orden, la más simple que se ocurra que tenga dos puntos a y b singulares regulares y el punto infinito sea ordinario. Vincular con las soluciones de la ecuación indicial, asociadas a las ecuaciones de Euler.

7. Escribir una ecuación diferencial lineal de segundo orden, la más simple que se ocurra que tenga dos puntos a y b singulares regulares y el punto infinito sea singular regular. Idem para que el infinito sea ordinario.

8. Escribir una ecuación diferencial lineal de segundo orden, la más simple que se ocurra que tenga tres puntos a, b y c singulares regulares y el punto infinito sea ordinario. Esta será la ecuación de Riemann-Papperitz.

9. Escribir una ecuación diferencial lineal de segundo orden, la más simple que se ocurra que tenga dos puntos 0 y 1 como singulares regulares y el punto infinito sea singular regular.

10. Demostrar que la ecuación de Riemann-Papperitz es invariante mediante una transformación de Möbius.

11. Hallar la relación entre la ecuación de Riemann-Papperitz y la ecuación hipergeométrica. Comenzar con la ecuación de Riemann-Papperitz y realizar un cambio adecuado de variables.

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar