Ejercicios Teóricos 3
Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
Sistemas Lineales

1 Sistemas Lineales

1. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \mathbf{F}(t)$$

donde $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^n$.

A partir del Teorema de Picard, explicitar las condiciones sobre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{F}$ para garantizar solución única.

1.1 El Sistema Homogéneo

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado a través de una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que admite n soluciones linealmente independientes las cuales generan la solución general

$$\vec{x}(t) = \alpha^1\vec{x}_1(t) + \alpha^2\vec{x}_2(t) + \cdots + \alpha^n\vec{x}_n(t)$$

Nota: Las coordenadas son identificadas con supraíndices, esto permite -cuando se desea- trabajar con la convención de Einstein.

b) Matriz fundamental. Notar que la solución general puede escribirse como un producto de matrices:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & \cdots & x_n^2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{bmatrix} = \mathbf{U}(t)\vec{\alpha}$$

donde

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1^1(t) \\ x_1^2(t) \\ \vdots \\ x_1^n(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2^1(t) \\ x_2^2(t) \\ \vdots \\ x_2^n(t) \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n^1(t) \\ x_n^2(t) \\ \vdots \\ x_n^n(t) \end{bmatrix}$$

Es decir, se encolumnan los vectores generadores de la solución general. A la matriz $\mathbf{U}(t)$ se la denomina *matriz fundamental.*

c) Demostrar que en cualquier instante de tiempo, $\mathbf{U}(t)$ tiene inversa. Más aún, $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = \det[\mathbf{U}(t)]$ es el determinante denominado *Wronskiano.*

d) El Propagador. Comprobar que si la condición inicial es $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, entonces, la solución

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar

en cualquier instante $t \geq t_0$ puede escribirse como

$$\vec{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(t_0)\vec{x}_0 = \mathbf{\Psi}(t, t_0)\vec{x}_0$$

Donde $\mathbf{\Psi}(t, t_0)$ es el denominado *propagador* del sistema. Este propagador actúa sobre el espacio de condiciones iniciales representando la evolución temporal.

e) Comprobar que el propio propagador satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{\Psi}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{\Psi}(t, t_0), \qquad \mathbf{\Psi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

1.2 Ecuación no homogénea. Método de Variación de los Parámetros

3. De manera análoga a lo realizado para el caso de dimensión 1, para resolver un problema no homogéneo se propone una solución particular que tenga la forma de la solución de la homogénea, pero donde las constantes arbitrarias ya no sean constantes, sino funciones de t

$$\vec{x}_p(t) = \mathbf{U}(t)\vec{\alpha}(t)$$

Demostrar que la solución general se puede escribir como

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t, t_0)\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}(t, t')\mathbf{F}(t')dt'$$

donde el $\mathbf{\Psi}(t, t')$ es el propagador del problema homogéneo ya definido ateriormente.

1.3 Sistema Homogéneo con Matriz de Coeficientes Constantes

4. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\vec{x}, \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad \textit{constante}$$

Proponer una solución de la forma

$$\vec{u}(t) = \vec{\xi} e^{\lambda t}$$

y comprobar que el problema es un problema de hallar autovalores y autovectores.

5. Mediante aplicación del *Método de Picard* demostrar que la matriz fundamental para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\vec{x}, \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad \textit{constante}$$

puede escribirse como

$$\mathbf{U}(t) = \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \frac{[\mathbf{A}\,t]^2}{2!} + \frac{[\mathbf{A}\,t]^3}{3!} + \frac{[\mathbf{A}\,t]^4}{4!} \cdots \right\} \equiv e^{\mathbf{A}t}$$

1.3.1 Caso Diagonalizable

6. Bajo la hipótesis de que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable, probar que

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

Nota: Los λ_j no precisan ser todos distintos.

1.3.2 Caso No Diagonalizable

7. Considerar un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en el que la matriz $\mathbf{A}$ no sea diagonalizable. Demostrar que la matriz fundamental puede en este caso escribirse como

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}$$

Donde para cada bloque de Jordan $k \times k$ se tiene

$$e^{\mathbf{J}_k t} = e^{(\mathbf{D}_k + \mathbf{N}_k)t} = e^{\lambda_k t}\left\{\mathbf{I} + \mathbf{N}_k\, t + \frac{[\mathbf{N}_k\, t]^2}{2!} + \frac{[\mathbf{N}_k\, t]^3}{3!} + \cdots + \frac{[\mathbf{N}_k\, t]^{k-1}}{(n-1)!}\right\}$$

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar