Ejercicios Teóricos 2
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Método de Picard. Integraciones Sucesivas

1 Aproximaciones Sucesivas

1. Realizar una descripción del *método de aproximaciones sucesivas.* Pensar el problema para resolución de ecuaciones.

2. Establecer en general qué le vamos a pedir a un esquema de iteración funcional.

3. Dada una ecuación nolineal $F(x) = 0$, *"despejamos"* una x y definimos una iteración

$$x_{\ell+1} = \varphi(x_\ell), \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

LLamando α a la solución y M es una cota de φ' en un intervalo dado, comprobar que

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \varphi(\alpha) \quad \text{punto fijo} \\ |\xi_{\ell+1} - \alpha| & \leq & M\,|\xi_\ell - \alpha| \\ |\xi_{\ell+1} - \alpha| & \leq & M^{\ell+1}\,|\xi_0 - \alpha|^{\ell+1} \end{array}$$

A partir de estas relaciones, establecer el criterio de convergencia.

4. Para resolver la ecuación $x + \ln(x) = 0$ (cuya solución a 6 decimales es $\alpha = 0.567143$) comprobar que se pueden definir las siguientes iteraciones:

$$\text{a)}\, x_{\ell+1} = \ln\left(\frac{1}{x_\ell}\right), \qquad \text{b)}\, x_{\ell+1} = e^{-x_\ell}, \qquad \text{c)}\, x_{\ell+1} = \frac{x_\ell + e^{-x_\ell}}{2}$$

En virtud de lo hallado en el ejercicio anterior, cuál iteración elegiría? Iterar y comparar con la solución

2 Método de Picard. $n = 1$

5. A partir de un problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

establecer una iteración. Establecer las condiciones necesarias para poder definirla (es decir, que siempre se puedan calcular sus términos).

6. Sea el PVI

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

donde f es una función continua en el rectángulo

$$R : |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b, \qquad a, b > 0$$

que está en el plano real (x, y).

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar

Sea I un intervalo sobre el eje x incluído en $|x - x_0| \leq a$. Probar que $\varphi(x)$ es solución del PVI si y sólo si satisface la ecuacioń integral

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

7. Dada la iteración

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\, dt$$

donde f está definida en el rectángulo R definido en el ejercicio **6.** Demostrar para todo $k \in \mathbb{N}$, los puntos $(x, y_k(x)) \in R$

8. Demostrar que las funciones $y_k(x)$ son continuas en el intervalo

$$I : |x - x_0| \leq \alpha = \min\{a, b/M\}$$

donde M es una cota de f en R.

9. Sea la función $f(x, y)$ definida en R. Demostrar que si $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en R, entonces satisface la condición de Lipschitz con respecto a la variable y. Es la recíproca válida?

10. Sea R el rectángulo en $\mathbb{R}^2$ definido por $R : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b,\ (a, b > 0)$. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ continua, de Lipschitz -de constante K- y sea M una cota de f en R, es decir $|f(x, y)| \leq M$.

Bajo estas hipótesis, demostrar que

$$|\phi_{\ell+1}(x) - \phi_\ell(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(K|x - x_0|)^{\ell+1}}{(\ell + 1)!}$$

donde ϕ_j está definido a través de la relación $\phi_j(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{j-1}(t))\, dt$.

11. Bajo las hipótesis del ejercicio anterior, demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = \phi(x)$$

donde $\phi(x)$ es solución del PVI.

12. Discutir la unicidad de las soluciones obtenidas a partir del Método de Picard y analizar el PVI

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

13. Sea la EDO

$$y' = f(x, y)$$

Estudiar el comportamiento de dos soluciones con condiciones iniciales próximas.

14. Comparar los métodos de Cauchy y Picard, con relación a las hipótesis necesarias.

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar

3 Método de Picard-Lindelöf. $n > 1$

Sean $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{F}(t;\vec{x}) = (f_1(t;\vec{x}), f_2(t;\vec{x}), \ldots, f_n(t;\vec{x}))$. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales expresado de manera vectorial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{F}(t;\vec{x})$$

con las condiciones iniciales $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$

15. Demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales es equivalente al sistema de ecuaciones integrales

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t';\vec{x}(t'))dt'$$

16. Sea $\mathbf{F}(t;\vec{x}(t))$ definida en el dominio

$$\mathcal{D} : |t - t_0| \leq \rho, \qquad ||\vec{x} - \vec{x}_0||_1 \leq b$$

donde la *norma 1* se define a través de $||\vec{v}||_1 = \sum_{j=1}^{n} |v_j|$. Sean $M_1, M_2, \ldots M_n$ cotas en el dominio de las funciones f_j y $M = \max\{M_1, M_2, \ldots M_n\}$

Demostrar que para $|t - t_0| \leq \alpha = \min\{\rho, \frac{b}{M}\}$ puede definirse la sucesión

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(0)}(t) &= \vec{x}_0 \\ \vec{x}^{(k+1)}(t) &= \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t';\vec{x}^{(k)}(t'))dt' \end{aligned}$$

donde, además, todas las funciones $\vec{x}^{(k)}$ son continuas en t_0.

17. *Condición de Lipschitz* Una función vectorial $\mathbf{F}(t;\vec{x})$ se dice que es de Lipschitz en el dominio $\mathcal{D}$ si existe una constante $L \geq 0$ (contante de Lipschitz) que satisface

$$||\mathbf{F}(t;\vec{x}) - \mathbf{F}(t;\vec{x}_0)||_1 \leq L||\vec{x} - \vec{x}_0||_1$$

Demostrar que si las derivadas parciales con respecto $x_1, x_2, \ldots x_n$ con continuas en $\mathcal{D}$ entonces es de Lipschitz en $\mathcal{D}$. Pista: Extender intuitivamente a partir del caso de una función $f(t;x,y)$.

18. *Convegencia del método.*
a) Demostrar que si la función $\mathbf{F}(t;\vec{x})$ es continua y de Lipschitz en $\mathcal{D}$ (con cota M y constante de Lipschitz L) entonces se cumple

$$||\vec{x}^{(k)}(t) - \vec{x}^{(k-1)}(t)||_1 \leq \frac{M}{L}\frac{[L|t - t_0|]^k}{k!}$$

b) Llamando $\vec{x}(t) = \lim_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}$ demostrar

$$||\vec{x}(t) - \vec{x}^{(k)}(t)||_1 \leq \frac{M}{L}\frac{[L\alpha]^{k+1}}{(k+1)!}e^{L\alpha}$$

c) Finalmente, probar que $\vec{x}(t)$ obtenida a partir del límite anterior es solución del problema de valor inicial.

Nota: Para estos tres incisos, extender apropiadamente lo hecho para el caso de $n = 1$.

email: octavio@fcaglp.unlp.edu.ar