Teoría de Perturbaciones

Clase II

Mecánica Hamiltoniana I

- Principios Generales: De Lagrange a Hamilton
- Estructura Simpléctica
- Transformaciones Canónicas
- Integrales Invariantes

1. Ecuaciones de Lagrange

Consideremos un sistema de n grados de libertad, caracterizado por las n coordenadas generalizadas $q^1, q^2, \ldots, q^n$. Las ecuaciones de movimiento en el contexto de la Mecánica Lagrangiana son

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right] - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots n$$

donde L es el Lagrangiano del sistema,

$$L = T - V$$

construído a partir de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. Las ecuaciones de movimiento forman un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden.

El cambio de coordenadas de las originales cartesianas a las generalizadas, produce un cambio en la métrica del espacio (llamado *Variedad Lagrangiana*):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dq^\mu\, dq^\nu$$

donde las cantidades $g_{\mu\nu}$ son las coordenadas del *tensor métrico*. En general, las coordenadas del tensor métrico son funciones de las coordenadas de posición en la variedad lagrangiana, por lo que también se le dice que es un *campo tensorial* definido en la variedad.

Recordemos la *Convención de Einstein*: Si en una expresión hay índices repetidos (pero de distinta naturaleza, contravariantes y covariantes) se asume que se están sumando en la dimensión del espacio.

Como ejemplo, del cambio a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Calculando el elemento de arco en cartesianas,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

Entonces, las coordenadas del tensor métrico en polares será

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

El *momento generalizado* es calculado a partir del Lagrangiano como

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}$$

Si la dependencia de las velocidades proviene exclusivamente de la energía cinética, tenemos que

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\mu} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\mu}\left[g_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right]$$

Haciendo la cuenta, resulta

$$p_\mu = g_{\mu\nu}\,\dot{q}^\nu$$

1.1. Sobre la covarianza del momento y la contravarianza de la velocidad

No es casual la elección de supraíndice para las coordenadas de las velocidades generalizadas, $\dot{q}^\nu$ y los subíndices para los momentos, p_μ. Dado que el pasaje de uno a otro es a partir de la métrica, los momentos son elementos del *espacio dual* al espacio vectorial determinado por -en cada punto- los vectores velocidad generalizada, también llamado *espacio tangente* en cada punto. Es por eso que el espacio $(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}})$ es llamado *Espacio tangente* y el espacio $(\mathbf{q}; \mathbf{p})$ es el dual del espacio tangente, llamado *Espacio co-tangente* o *Fibrado Tangente.*

2. Ecuaciones de Hamilton

Las *Ecuaciones de Hamilton* son ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de un sistema mecánico equivalentes a las de Lagrange y Newton, pero de primer orden (duplicando la cantidad de ecuaciones a $2n$).

2.1. La Transformación de Legendre

Consideremos un sistema de n grados de libertad, cuyo Lagrangiano se escribe como

$$L(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$$

Vamos a definir una función $H = H(\mathbf{q}; \mathbf{p})$ definida a partir de la transformación de Legendre

$$H(\mathbf{q}; \mathbf{p}) = p_\mu\,\dot{q}^\mu - L = p_\mu\,\dot{q}^\mu - (T - V)$$

Reemplazando $p_\mu = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\mu}$ y la expresión de la energía cinética, obtenemos

$$H(\mathbf{q}; \mathbf{p}) = T(\mathbf{q}; \mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$$

que es la función *Hamiltoniana* del sistema o directamente el *Hamiltoniano.*

Notemos que bajo las hipótesis con las que lo construímos, el Hamiltoniano es la Energía Total del Sistema.

2.2. Las Ecuaciones de Hamilton

Haciendo los reemplazos, las ecuaciones de Lagrange se transforman en las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dq^\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_\mu}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \end{aligned}$$

que son las denominadas *Ecuaciones de Hamilton.*

2.2.1. Estructura Simpléctica. Matriz Simpléctica

Las ecuaciones diferenciales de Hamilton pueden escribirse de manera matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n} \\ -\mathbf{I}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{I}_{n\times n}$ es la matriz identidad $n \times n$.

La matriz que relaciona las derivadas temporales con el gradiente del Hamiltoniano es conocida como *Matriz Simpléctica* y tiene la siguiente particularidad:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n} \\ -\mathbf{I}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix}^2 = -\mathbf{I}_{2n\times 2n}$$

Entonces, si la llamamos $\mathbf{J}$ a la matriz simpléctica, ésta satisface $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$.

Es por esa razón que la matriz simpléctica es conocida también como la generalización de la unidad imaginaria de los números complejos.

Esta cualidad de las ecuaciones de Hamilton dió lugar a la teoría denominada *Geometría Simpléctica* y también a la *Topología Simpléctica*, cada disciplina estudia aspectos específicos a partir de una forma bilineal antisimétrica denominada *2-forma* γ denominada forma simpléctica.

$$\gamma = dq^{\mu} \wedge dp_{\mu} \qquad \text{(sumando en } \mu \text{)}$$

donde $\wedge$ es un producto antisimétrico. Si bien este curso no tiene como objetivo el desarrollo de la geometría simpléctica, algunos de los aspectos relevantes son muy útiles y sencillos de aplicar para las denominadas transformaciones canónicas.

Como veremos más adelante, el tipo de transformaciones que se admitirán en la Mecánica Hamiltoniana serán aquellas que preserven la *2- forma* γ. Es decir, que tanto en las variables originales como en las nuevas se debe cumplir

$$\gamma = dq^{\mu} \wedge dp_{\mu} = dq'^{\mu} \wedge dp'_{\mu}$$

donde $\mathbf{q}'$ y $\mathbf{p}'$ son las nuevas coordenadas.

2.2.2. Formas Diferenciales. Derivada Exterior

Desde el punto de vista operacional vamos a definir, a los fines del cálculo, las *formas diferenciales*, *derivada exterior de formas diferenciales* para llegar al *Teorema generalizado de Stokes.*

Formas Diferenciales. *Una p-forma diferencial es una expresión del tipo*

$$\Gamma = f_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

donde $p \leq n$ *y las cantidades* $f_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ *son funciones diferenciables de* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *en determinado dominio. Además,* $\wedge$ *es el producto exterior (antisimétrico).*

Ejemplo. La expresión

$$f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz$$

es una 1-forma diferencial para funciones f_1, f_2 y f_3 diferenciables en un dominio de $\mathbb{R}^3$.

Regla básica del producto exterior. Dado el producto exterior $\wedge$, dado que es antisimétrico debemos recordar que:

- $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$
- $dx^\mu \wedge dx^\mu = -dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$

Regla básica de la derivada exterior. Dada una forma diferencial, definimos la derivación exterior a partir de las siguientes propiedades:

d1.
$$d\left[dx^\mu\right] = 0$$

d2. Para una forma diferencial dada, Γ, dada por $\Gamma = f_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ la derivada exterior se obtiene

$$d\Gamma = \left[df_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}\right] \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$
$$d\Gamma = \left[\frac{\partial f_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}}{\partial x^{\nu_j}} dx^{\nu_j}\right] \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

Para efectuar el cálculo, es preciso tener el cuenta la regla de la antisimetría.

Ejemplos. Para familiarizarnos con la derivación exterior, veamos algunos ejemplos.

- **Derivada exterior de una 1-forma.** Dada la 1-forma en $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma_1 = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$$

que para simplificar pongamos

$$\gamma_1 = Pdx + Qdy$$

La derivada exterior, la calculamos:

$$d\gamma_1 = \left[\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right] \wedge dx + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right] \wedge dy$$

Entonces, como $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ y $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ tenemos

$$d\gamma_1 = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx \wedge dy$$

- **Derivada exterior de una 2-forma.** Dada la 2-forma en $\mathbb{R}^3$:

$$\gamma_2 = P\ dy \wedge dz + Q\ dz \wedge dx + R\ dx \wedge dy$$

aplicando la regla de la derivación exterior y la antisimetría, obtenemos

$$d\gamma_2 = \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right]\ dx \wedge dy \wedge dz$$

2.2.3. El Teorema Generalizado de Stokes

Si observamos las expresiones para las derivadas exteriores de formas diferenciales definidas en $\mathbb{R}^3$ notamos que las coordenadas de la derivada exterior de una 1-forma diferencial son las coordenadas del rotor (si vemos las coordenadas (P, Q, R) como las coordenadas de un campo vectorial). Asimismo, la derivada exterior de una 2-forma, resulta la divergencia. A partir de este resultado, y bajo las hipótesis de los teoremas relacionados al Análisis Vectorial podemos enunciar:

Teorema. Sea ω una p-forma diferencial definida en un dominio de $\mathbb{R}^n$. Sea R una región cerrada y orientable en $\mathbb{R}^n$ y denotemos ∂R a la frontera de R. Entonces,

$$\int_{\partial R} \omega \ = \int_{R} d\omega$$

Este resultado es conocido como Teorema generalizado de Stokes.

Aplicando este teorema en $\mathbb{R}^2$ tenemos el Teorema de Green. Aplicando para las formas diferenciales adecuadas en $\mathbb{R}^3$ tenemos los Teoremas de Stokes y de Gauss.

Si una forma diferencial proviene de una diferencial exacta (es decir, es la derivada exterior de una forma de un orden menor) tenemos

$$d\,[d\omega] = 0$$

Este resultado es el que nos conduce a los relacionados con independencia del camino para integrales de línea, para integrales nulas si es que el campo vectorial que analizamos es un gradiente, para determinar que la divergencia de un rotor es nula, etc. Claramente, estas propiedades son válidas bajo las hipótesis de continuidad y diferenciabilidad de las funciones involucradas en los dominios involucrados.

Es importante aclarar que lo que hemos visto de formas diferenciales, producto exterior y derivada exterior es a modo operacional.

La teoría que desarrolla todos estos conceptos es vasta y existen muchos libros en los cuales se puede profundizar, lo aquí expuesto puede produndizarse en los siguientes libros, de los cuales se obtuvieron las ideas y resultados principales:

- Abraham, R., Mardsen, J., *Foundations of Mechanics*, W. A. Benjamin, 1966.
- Arnol'd, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1981.
- Flanders, H., *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Dover, 1963.

En nuestro estudio de Mecánica Hamiltoniana aplicaremos operacionalmente (y no demasiado) lo básico, por lo cual con lo expuesto en este material vamos a trabajar lo relacionado a nuestra 2-forma diferencial: El corchete de Poisson.

El Corchete de Poisson será definido en el contexto clásico de la Mecánica Hamiltoniana, pero aprovecharemos lo visto de formas diferenciales para agilizar cálculos y para relacionar con lo denominaremos *Transformaciones Canónicas.*

3. Transformaciones Canónicas

Una vez definidas las ecuaciones canónicas,

$$\begin{aligned}\frac{dq^\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_\mu}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}\end{aligned}$$

vamos a estudiar los cambios de coordenadas que preserven este tipo de ecuaciones. Este tipo de transformaciones serán denominadas *Transformaciones Canónicas*. El estudio será básicamente hecho a partir de las definiciones básicas, pero también se aprovechará la teoría de las formas simplécticas.

3.1. Formulación Integral de las Transformaciones Canónicas

Las transformaciones canónicas son aquellos cambios de coordenadas que mantienen la estructura de los sistemas de ecuaciones diferenciales hamiltonianos, es decir, que si aplicamos el cambio de coordenadas en el espacio de fases:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}' &= \mathbf{q}'(\mathbf{q};\mathbf{p}) \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{p}'(\mathbf{q};\mathbf{p})\end{aligned}$$

en la nueva función hamiltoniana, H', las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Hamilton.

Desde el punto de vista del Principio de extremo de la acción, tenemos

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q};\mathbf{p})\,dt\right] = 0$$

Expresando el lagrangiano en función del Hamiltoniano, lo podemos escribir

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t_1} p_\mu\,\dot{q}^\mu\,dt - H(\mathbf{q};\mathbf{p})\,dt\right] = 0 \qquad \text{(sumando en } \mu\text{)}$$

o, equivalentemente,

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t_1} p_\mu\,dq^\mu - H(\mathbf{q};\mathbf{p})\,dt\right] = 0 \qquad \text{(sumando en } \mu\text{)}$$

Si el cambio de coordenadas preserva las ecuaciones de Hamilton, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{dq'^\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p'_\mu} \\ \frac{dp'_\mu}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q'^\mu}\end{aligned}$$

Entonces, desde el punto de vista de la integral de la acción tendremos

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t_1} p'_\mu\,dq'^\mu - H'(\mathbf{q}';\mathbf{p}')\,dt\right] = 0 \qquad \text{(sumando en } \mu\text{)}$$

Podemos decir, que las expresiones para la variación de la acción en las coordenadas originales y en las coordenadas nuevas se satisfacen simultáneamente si la diferencia de los integrandos es una diferencial total (o, en términos de integración temporal, una derivada total en el tiempo) Entonces,

$$[p_\mu \, \dot{q}^\mu - H(\mathbf{q};\mathbf{p})\,]\,dt - \left[p'_\mu \, \dot{q'}^\mu - H'(\mathbf{q}';\mathbf{p}')\,\right]dt = \frac{dS}{dt}$$

O, en notación de integrales de línea,

$$p_\mu \, dq^\mu - p'_\mu \, dq'^\mu - \left[H(\mathbf{q};\mathbf{p}) \,-\, H'(\mathbf{q}';\mathbf{p}')\,\right]dt = dS$$

Entonces, si es una diferencial exacta, tendremos una función $S = S(\mathbf{q};\mathbf{q}';t)$ tal que

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \\ p'_\nu &= -\frac{\partial S}{\partial q'^\nu} \\ H'\left(\mathbf{q}';-\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}'}\right) &= H\left(\mathbf{q};\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) + \frac{\partial S(\mathbf{q};\mathbf{q}';t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Estas tres últimas ecuaciones permiten determinar completamente el cambio de coordenadas, $(\mathbf{q};\mathbf{p}) \to (\mathbf{q}';\mathbf{p}')$.

Es conocido que no es única el tipo de función generatriz. En efecto, consideremos la diferencial exacta:

$$q'^\mu \, dp'_\mu + p'_\mu \, dq'^\mu = d\left[p'_\mu q'^\mu\right]$$

Entonces, sumando el término de la izquierda dentro de la integral, al hacer la variación respecto de los caminos posibles, se mantendrá la condición de extremo, por lo cual,

$$\left[p_\mu \, dq^\mu - p'_\mu \, dq'^\mu\right] + \left[p'_\mu \, dq'^\mu + q'^\mu \, dp'{}_\mu\right] - \left[H(\mathbf{q};\mathbf{p}) \,-\, H'(\mathbf{q}';\mathbf{p}')\,\right]dt = d\left[S + p'_\mu q'^\mu\right]$$

llamando

$$S' = S + p'_\mu q'^\mu$$

y simplificando en el miembro de la izquierda, tenemos:

$$p_\mu \, dq^\mu + q'^\mu \, dp'{}_\mu - \left[H(\mathbf{q};\mathbf{p}) \,-\, H'(\mathbf{q}';\mathbf{p}')\,\right]dt = dS'$$

Con las relaciones,

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \\ q'^\nu &= \frac{\partial S}{\partial p'_\nu} \\ H'\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}'};\mathbf{p}'\right) &= H\left(\mathbf{q};\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) + \frac{\partial S'(\mathbf{q};\mathbf{p}';t)}{\partial t} \end{aligned}$$

sólo a modo de explicar la notación, se adoptó el uso de las negritas para simbolizar el vector completo, y además

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \equiv \nabla_\mathbf{p}$$

Y de la misma manera, con todas las coordenadas.

3.2. Formulación Diferencial de las Transformaciones Canónicas

En virtud de las definiciones y propiedades que deben satisfacer una transformación de coordenadas para que sea canónica podemos observar que el cambio definido a través de una función generatriz no es un *a priori* la transformación. Más aún, si proponemos una función generatriz, tenemos la garantía de que la transformación será canónica.

Ahora bien, si por las característica propias del sistema mecánico proponemos la transformación, es necesario un mecanismo de comprobación directa del carácter de la transformación.

Si forzamos a que la función generatriz no dependa explícitamente del tiempo, la relación de diferencial exacta se escribe

$$p_\mu \, dq^\mu - p'_\mu \, dq'^\mu = dS$$

Por lo que hemos de formas diferenciales, la derivada exterior de una diferencial exacta es nula, por lo que podemos escribir:

$$d\left[p_\mu \, dq^\mu - p'_\mu \, dq'^\mu\right] = d[dS] = 0$$

Es decir,

$$dp_\mu \wedge dq^\mu - dp'_\mu \wedge dq'^\mu = 0$$

O, equivalentemente

$$dp_\mu \wedge dq^\mu = dp'_\mu \wedge dq'^\mu$$

Esta última expresión es muy práctica como criterio de analiticidad de una transformación de coordenadas.

Ejemplo. Consideremos un sistema dinámico de un grado de libertad donde las coordenadas originales son (q, p) y las coordenadas nuevas vienen dadas a partir de las relaciones

$$x = \sqrt{2p}\,\cos q, \qquad y = \sqrt{2p}\,\sin q$$

Calculemos los diferenciales:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\sqrt{2p}}\cos q\,dp - \sqrt{2p}\,\sin q\,dq \\ dy &= \frac{1}{\sqrt{2p}}\sin q\,dp + \sqrt{2p}\,\cos q\,dq \end{aligned}$$

calculando $dx \wedge dy$

$$dx \wedge dy = \left[\frac{1}{\sqrt{2p}}\cos q\,dp - \sqrt{2p}\,\sin q\,dq\right] \wedge \left[\frac{1}{\sqrt{2p}}\sin q\,dp + \sqrt{2p}\,\cos q\,dq\right]$$

desarrollando,

$$dx \wedge dy = \frac{1}{2p}\sin q\cos q\,dp \wedge dp + \cos^2 q\,dp \wedge dq - \sin^2 q\,dq \wedge dp - 2p\sin q\cos q\,dq \wedge dq$$

Como el producto exterior es antisimétrico, tenemos que $dp \wedge dp = dq \wedge dq = 0$ y permutando $dq = -dp \wedge dq$ obtenemos

$$dx \wedge dy = (\cos^2 q + \sin^2 q)\,dp \wedge dq = dp \wedge dq$$

Con lo que se comprueba que el cambio de coordenadas es canónico.

3.3. Transformación de Contacto de Lagrange

A partir del criterio de transformación canónica, esto es,

$$p_\mu \, dq^\mu - p'_\mu \, dq'^\mu = dS$$

Si forzamos a que la función generatriz sea una función constante tendremos

$$p_\mu \, dq^\mu - p'_\mu \, dq'^\mu = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$p_\mu \, dq^\mu = p'_\mu \, dq'^\mu$$

Este tipo de criterio nos será de utilidad a la hora de completar una transformación dada solo en una de las coordenadas.

Ejemplo. Variables Resonantes para el Problema Restringido de los 3 Cuerpos. Consideremos el problema restringido de los tres cuerpos elíptico. Consideremos un asteroide que se mueve en el mismo plano con Júpiter, el cual se considerará en órbita elíptica. Vamos a suponer que la órbita de Júpiter es fija, es decir, no consideraremos perturbaciones seculares planetarias sobre su órbita.

Las variables canónicas del problema asteroidal serán las *variables de Delaunay* (vamos a construir esta coordenadas más adelante):

$$\begin{aligned} &\lambda, \quad L\sqrt{\mu\, a} \\ &\varpi, \quad G - L = L\left[\sqrt{1-e^2} - 1\right] \\ &\lambda_J, \quad \Lambda_J \end{aligned} \tag{1}$$

donde λ es la longitud media y ϖ es el argumento del perihelio. Además λ_J es la longitud media de Júpiter. Como la longitud media de Júpiter evoluciona con velocidad constante n_J, es decir,

$$\dot{\lambda}_J = n_J = \frac{\partial H}{\partial \Lambda_J}$$

Esto implica que el Hamiltoniano del problema tiene un término adicional

$$H = H_{\text{dos cuerpos}} + n_J\, \Lambda_J + \text{perturbacion}$$

En el caso en que el asteroide esté en resonancia de movimientos medios de primer orden con Júpiter, un cambio de coordenadas que dé cuenta de la resonancia será (Ferraz-Mello, *Averaging the elliptic asteroidal problem near a first order resonance*, AJ Vol. 94, Nro. 1 (1987)):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= (p+1)\,\lambda - p\,\lambda_J - \varpi \\ \theta_2 &= (p+1)\,\lambda - p\,\lambda_J - \varpi_J \\ \theta_3 &= \lambda - \lambda_J \end{aligned}$$

Debemos encontrar los momentos conjugados a estas nuevas variables angulares. A partir de una transformación de contacto de Lagrange tenemos, llamando J_1, J_2 y J_3 a los momentos conjugados a θ_1, θ_2 y θ_3

$$J_1\, d\theta_1 + J_2\, d\theta_2 + J_3\, d\theta_3 = L\, d\lambda + (G-L)\, d\varpi + \Lambda_J\, d\lambda_J$$

Además,

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= (p+1)\,d\lambda - p\,d\lambda_J - d\varpi \\ d\theta_2 &= (p+1)\,d\lambda - p\,d\lambda_J \\ d\theta_3 &= d\lambda - d\lambda_J \end{aligned}$$

entonces, el criterio de analiticidad establece,

$$J_1\,[(p+1)\,d\lambda - p\,d\lambda_J - d\varpi] + J_2\,[(p+1)\,d\lambda - p\,d\lambda_J] + J_3\,[d\lambda - d\lambda_J] = L d\lambda + (G-L)d\varpi + \Lambda\,d\lambda_J$$

Agrupando, tenemos

$$[(p+1)\,(J_1+J_2) + J_3]\,d\lambda + [-p\,(J_1+J_2) - J_3]\,d\lambda_J - J_1\,d\varpi = L d\lambda + (G-L)d\varpi + \Lambda\,d\lambda_J$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (p+1)\,(J_1+J_2) + J_3 &= L \\ J_1 &= L - G \\ -p\,(J_1+J_2) - J_3 &= \Lambda_J \end{aligned}$$

Resultando el cambio en momentos,

$$\begin{aligned} J_1 &= L - G \\ J_2 &= \Lambda_J + G \\ J_3 &= -p\,L - (p+1)\Lambda_J \end{aligned}$$

De esta manera completamos la transformación canónica.

4. Los corchetes de Lagrange y de Poisson

4.1. El Corchete de Lagrange

Consideremos el espacio de fases de un sistema mecánico con el sistema de coordenadas $(\mathbf{q};\mathbf{p})$. Dadas las funciones f y g, se define el corchete de Lagrange entre f y g, $\{f,g\}$ a

$$\{f,g\} = \frac{\partial q^\mu}{\partial f}\frac{\partial p_\mu}{\partial g} - \frac{\partial q^\mu}{\partial g}\frac{\partial p_\mu}{\partial f} \qquad \text{(sumando en } \mu)$$

Este corchete aparece en la aplicación del *método de variación de las constantes* para el problema de los tres cuerpos.

4.2. El Corchete de Poisson

El corchete de Poisson tiene un papel fundamental en la estructura simpléctica del espacio de fases. Además, está relacionada con la propia evolución temporal de las cantidades, tiene su correlato cuántico (como límite del principio de correspondencia). Es decir, el corchete de Poisson es, en cierto sentido, el soporte de la estructura geométrica de la Mecánica Hamiltoniana.

Bajo las hipótesis que se consideraron para la definición del Corchete de Lagrange, se define el Corchete de Poisson entre f y g, $[f,g]$ a

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial q^\mu}$$

A partir de un cálculo directo podemos notar que las ecuaciones de Hamilton pueden reescribirse a partir del corchete de Poisson,

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\mu} &= [q^{\mu}, H] \\ \dot{p_{\mu}} &= [p_{\mu}, H] \end{aligned}$$

En general, cualquier derivada temporal puede escribirse de esa manera.

4.2.1. Derivada de Lie. Series de Lie

Dado un sistema hamiltoniano, tenemos que la derivada temporal de una determinada cantidad viene dada a partir del Corchete de Poisson,

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\mu} &= [q^{\mu}, H] \\ \dot{p_{\mu}} &= [p_{\mu}, H] \end{aligned}$$

La derivadas derivadas segundas respecto del tiempo serán

$$\begin{aligned} \ddot{q}^{\mu} &= [\dot{q}^{\mu}, H] = [[q^{\mu}, H], H] \\ \ddot{p}_{\mu} &= [\dot{p}_{\mu}, H] = [[p_{\mu}, H], H] \end{aligned}$$

Y así sucesivamente.

Entonces, podemos notar que dado el sistema de ecuaciones diferenciales (con condiciones iniciales) hamiltoniano

$$\dot{q}^{\mu} = \frac{\partial H(\mathbf{q};\mathbf{p})}{\partial p_{\mu}}$$
$$\dot{p_{\mu}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q};\mathbf{p})}{\partial q^{\mu}}$$
$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$$

Las series formales para la solución del problema serán (Taylor)

$$\begin{aligned} q^{\mu}(t) &= q_0^{\mu} + \dot{q}^{\mu}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{q}^{\mu}(t_0)(t-t_0)^2 + \cdots \\ p_{\mu}(t) &= p_{\mu 0} + \dot{p}_{\mu}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{p}_{\mu}(t_0)(t-t_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

y si relacionamos las derivadas temporales con el corchete,

$$\begin{aligned} q^{\mu}(t) &= q_0^{\mu} + [q^{\mu}, H](t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}[q^{\mu}, H], H](t_0)(t-t_0)^2 + \cdots \\ p_{\mu}(t) &= p_{\mu 0} + [p_{\mu}, H](t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}[p_{\mu}, H], H](t_0)(t-t_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Derivada de Lie. La derivada de Lie asociada al sistema de ecuaciones diferenciales hamiltoniano

$$\dot{q}^{\mu} = \frac{\partial F(\mathbf{q};\mathbf{p})}{\partial p_{\mu}}$$
$$\dot{p_{\mu}} = -\frac{\partial F(\mathbf{q};\mathbf{p})}{\partial q^{\mu}}$$
$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$$

definimos la derivada de Lie a lo largo de la curva solución al operador D_F definido como:

$$\begin{aligned} D_F^0 &= Id \\ D_F^1 &= [\ ,F] \\ D_F^{\ell+1} &= D_F^1\left(D_F^\ell\right) \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier función g definida en el espacio de fases de un sistema dinámico tenemos,

$$\begin{aligned} D_F^0(g) &= g \\ D_F^1(g) &= [\,g\,,F] \\ D_F^2(g) &= [[\,g\,,F],F] \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Entonces, comparando con las series formales para el problema mecánico, podemos escribir:

$$\begin{aligned} q^\mu(t) &= D_H^0(q^\mu)(t_0)(t-t_0)^0 + D_H^1(q^\mu)(t_0)(t-t_0)^1 + \frac{1}{2!}D_H^2(q^\mu)(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \\ p_\mu(t) &= D_H^0(p_\mu)(t_0)(t-t_0)^0 + D_H^1(p_\mu)(t_0)(t-t_0)^1 + \frac{1}{2!}D_H^2(p_\mu)(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

estas expresiones se conocen como *Series de Lie.*

Forma Exponencial de las Series de Lie. De manera operacional y formal, podemos definir el operador:

$$e^{D_F} \equiv D_F^0 + D_F^1 + \frac{1}{2!}D_F^2 + \cdots$$

Entonces, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales asociados a un Hamiltoniano H serán:

$$\begin{aligned} q^\mu(t) &= e^{(t-t_0)(D_H)}q^\mu \\ p_\mu(t) &= e^{(t-t_0)(D_H)}p_\mu \end{aligned}$$

Este tipo de representación exponencial es frecuente en Mecánica Cuántica, en Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, etc.

La construcción formal de las soluciones con representación exponencial en la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales tienen como origen en el denominado *Método de Peano-Baker* (Ince, E., *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1956)

En Mecánica Hamiltoniana, en particular, en Mecánica Celeste, el formalismo de las series de Lie fue inicialmente introducido por Sérsic (Sérsic, J. L., *Aplicaciones de un cierto tipo de transformaciones canónicas en Mecánica Celeste*, 1956), Gröbner (Gröbner, W., *Die Lie-Reihen und Ihre Anwendungen*, Deutch-Verlag, 1960), Hori (Hori, G. I., *Theory of general perturbation theory with unspecified canonical variables*, PSAJ, **18**, 287, 1966) y Deprit (Deprit, A. *Canonical Transformations depending on a small parameter*, Cel. Mech. **I**, 12, 1969). Más recientemente, Ferraz-Mello (Ferraz-Mello, S. *Canonical Perturbation Theories, Degenerate Systems and Resonances*, Springer, 2006) desarrolló una teoría de series de Lie para problemas resonantes, que permitió ampliar las ideas de los denominados *elementos propios* a asteroides en resonancias de movimientos medios con Júpiter.

5. Integrales Invariantes

Una característica de los sistemas Hamiltonianos es la existencia de los denominados *integrales invariantes*. Estas cantidades, definidas a partir de integrales de formas diferenciales, son preservadas por transformaciones canónicas.

A partir de la definición de la función generatriz,

$$p_\mu \, dq^\mu - p'_\mu \, dq'^\mu + \left[H - H'\right] \, dt = dS$$

Entonces, si γ y $gamma'$ son la misma curva cerrada, pero parametrizada en los diferentes sistemas de coordenadas, tenemos:

$$\oint_\gamma p_\mu \, dq^\mu - \oint_{\gamma'} p'_\mu \, dq'^\mu + \oint \left[H - H'\right] \, dt = \oint dS$$

debido a lo cerrado de las curvas, tenemos

$$\oint_\gamma p_\mu \, dq^\mu = \oint_{\gamma'} p'_\mu \, dq'^\mu$$

Este tipo de integrales, se denominan *integrales invariantes.* Este integral invariante supone la existencia de soluciones periódicas. Este hecho será aprovechado para la definición de las denominadas *variables ángulo-acción.*

Entonces, podemos escribir,

$$I = \oint_\gamma p_\mu \, dq^\mu$$

Es un integral invariante. Este integral invariante se denomina *integral invariante relativo.*

Si aplicamos el Teorema Generalizado de Stokes al integral invariante obtenemos,

$$I = \iint_\Omega dp_\mu \wedge dq^\mu$$

donde Ω es el interior de la curva γ. Este integral invariante se lo denomina *integral invariante absoluto* o también *integral invariante de Poincaré.*

Esta formulación moderna de los integrales invariantes puede profundizarse en el libro de Vucetich (Vucetich, H., *Introducción a la Mecánica Analítica*, Eudeba, 2008).

Abordajes clásicos del problema de los integrales invariantes pueden hallarse en Whittaker (Whittaker, E., *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, 1961), Pars (Pars, L., *A Treatise on Analytical Dynamics*, Ox Box Press, 1969) o, directamente en la fuente original Poincaré (Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Gautier-Villards, T. III, 1899*)