Matemáticas Especiales II
2016
Ecuaciones Diferenciales a Partir de Modelizaciones

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Algunos Modelos Simples a partir de Observación

- Café filtrado
- Llenado de la mochila de inodoro
- Ley de enfriamiento de Newton
- Crecimiento bacteriano
- Difusión de una enfermedad
- Modelo Predador-Presa de Lotka-Volterra
- Desintegración Radiactiva. Datación con Carbono 14
- Sobre los parámetros

Café Filtrado

Situación

Vamos a preparar café de filtro. Ponemos las cucharadas de café necesarias en el filtro de papel. Apoyamos sobre la jarra que luego contendrá el café, y vertemos el agua a la temperatura necesaria.

Observación

Observamos que el café va cayendo sobre la jarra no a una velocidad constante: Notamos que al principio cae con mayor "velocidad" y conforme se va agotando el café dentro del filtro la velocidad disminuye.

Modelo Matemático

Llamando $c(t)$ a la cantidad de café dentro del filtro. Notemos que una aproximación a lo observado puede ser que la velocidad de vaciado depende de la cantidad de café en el filtro.

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\, c, \qquad \alpha > 0, \text{ constante}$$

Mochila del Inodoro

Situación

Realizamos una descarga de agua de un inodoro y analizamos el proceso de llenado de la mochila.

Observación

Observamos que cuanto más vacia está la mochila, más rápido se va cargando y mientras más llena, menor es la velocidad con la que entra el agua. En este proceso, juega un papel fundamental el dispositivo denominado "flotante". Este dispositivo, al subir el nivel de agua, va cerrando la válvula que permite el ingreso de la misma al depósito.

Modelo Matemático

Llamando $c(t)$ a la cantidad de agua dentro de la mochila, y teniendo en cuenta la observación del proceso, podemos modelar

$$\frac{dc}{dt} = \alpha\,[c_{total} - c(t)], \qquad \alpha > 0, \ \text{constante}$$

Ley de Enfriamiento de Newton

Situación

Sacamos una torta del horno y ponemos atención a la temperatura de la torta, conforme pasa el tiempo.

Observación

Se observa que la temperatura de la torta (o lo que saquemos del horno) va modificándose (disminuyendo, enfriándose) a un ritmo que depende directamente a la diferencia de temperatura, respecto a la temperatura ambiente.

Modelo Matemático

Llamando $T(t)$ a la temperatura en cada instante, notemos que de la observación podemos modelar

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha\,[T(t) - T_{ambiente}], \qquad \alpha > 0, \text{ constante}$$

Situación

Vamos a estudiar la cantidad de bacterias en un cultivo.

Observación

Observamos que la cantidad de bacterias va creciendo de tal manera que la tasa de crecimiento depende directamente con la cantidad de bacterias en el cultivo

Modelo Matemático

Llamando $c(t)$ a la cantidad de bacterias en un instante dado. Notemos que una aproximación a lo observado puede ser que la velocidad de reproducción de bacterias es

$$\frac{dc}{dt} = \alpha\, c, \qquad \alpha > 0, \ \text{constante}$$

Difusión de una enfermedad

Situación

Consideremos una enfermedad infecciosa que se contagia por contacto. Analicemos la cantidad de personas afectadas en cada instante de tiempo

Observación

Observamos que la cantidad de personas infectadas va cambiando a un ritmo que depende proporcionalmente al encuetro de personas infectadas con personas sanas.

Modelo Matemático

Llamando $x(t)$ a la cantidad de personas infectadas en determinado instante de tiempo. Sea n la cantidad total de personas en determinada población. Si originalmente estaban todas sanas y aparece un caso con la infección, podemos modelar la tasa de crecimiento de personas infectadas

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\, x(t)[n + 1 - x(t)], \qquad \alpha > 0, \text{ constante}$$

Modelo Predador-Presa

Situación

En un ambiente consideraremos una especie que se alimenta (y depende su existencia de ello) de otra especie.

Observación

Se observa que el predador va desapareciendo si no hay presa y que la presa se reproduce exponencialmente (tipo bacteriano) en ausencia de predador.

Modelo Matemático

Llamando $x(t)$ a la cantidad de predadores e $y(t)$ a la cantidad de presas en un instante dado, un modelo para aproximar el comportamiento en el ambiente es (Lotka-Volterra). Pensar si sólo hay o predadores o presas.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha\, x(t) + \gamma\, x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \beta\, y(t) + \delta\, x(t)y(t) \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ positivos} \end{aligned}$$

Situación

Los elementos radiactivos se caracterizan por inestabilidades en sus núcleos que producen un proceso de desintegración en el cual el elemento deja de existir para convertirse en otro, mediante un balance energético.

Observación

Se observa que la tasa de desintegración es proporcional a la propia cantidad existente

Modelo Matemático

Llamando $c(t)$ a la cantidad de átomos del elemento radiactivo, se modeliza

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\, c(t), \qquad \alpha > 0, \text{ constante}$$

Donde α dependerá del elemento en cuestión.

Decaimiento Radiactivo: Aplicación para datación con Carbono 14

Unas de las aplicaciones del decaimiento radiactivo es la datación de fósiles mediante la técnica conocida como "carbono 14". Esta tecnica se basa en la determinación del tiempo de un determinado fósil, midiendo la cantidad de carbono 14 que permanece en el fósil.
A partir de la ecuación que lo modela, podemos obtener la solución por una inspección directa:

$$c(t) = c_0\, e^{-\alpha\, t}, \qquad c_0 \text{ cantidad inicial}$$

La física nos provee el siguiente resultado: *"La cantidad de carbono 14 se reduce a la mitad en 5730 años"*. Entonces $\alpha = \frac{\ln(2)}{5730}$
Entonces, el tiempo del fósil se obtiene

$$T = -\frac{5730}{\ln(2)} \ln\left[\frac{c_{medida}}{c_0}\right], \qquad c_0 \text{ se conoce según el material.}$$

Sobre los parámetros

Los parámetros

En cada modelo presentado, los parámetros en cuestión son las constantes de proporcionalidad.

Dependencia de parámetros

En todos los casos presentados, si bien de la observación e intuición surge un modelo matemático, es imprescindible el conocimiento de los parámetros involucrados.

Ajuste de Parámetros

Estos parámetros deben ajustarse para la determinación final del modelo.

Aplicación del modelo

El ajuste de los parámetros se realiza, en general, de observaciones. Una vez determinado el parámetro, se utiliza el modelo analítico propuesto.