Matemáticas Especiales II
2016
El Laplaciano en Diferentes Sistemas de Coordenadas

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Cambios de Coordenadas. El Laplaciano

- Planteo Geométrico: El tensor métrico
- El elemento de arco
- Expresión para el Laplaciano
- Coordenadas Polares
- Coordenadas Cilíndricas
- Coordenadas Esféricas

Planteo Geométrico

El elemento de arco ds^2

El $\mathcal{R}^2$ y $\mathcal{R}^3$ el elemento de arco se define inicialmente a partir de un sistema de coordenadas cartesianas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Para el caso de $\mathcal{R}^3$, al efectuar un cambio de coordenadas (no necesariamente lineal)

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x, y, z) \quad \alpha = 1, 2, 3$$

debemos obtener el elemento de arco invirtiendo y calculando el $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ahora en las nuevas coordenadas

El tensor métrico

El elemento de arco ds^2

Realizado el cambio de coordenadas y calculando el ds^2 se obtiene, en las nuevas coordenadas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} g_{\mu\nu} dx'^{\mu} \, dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} \, dx'^{\nu}$$

donde las cantidades $g_{\mu\nu}$ son las coordenadas del *tensor métrico* en este sistema de coordenadas

Ejemplo 1: Coordenadas Polares

En coordenadas polares,

$$x = \rho\,\cos(\theta), \qquad y = \rho\,\sin(\theta)$$

entonces,

$$dx = \cos(\theta)\,d\rho - \rho\,\sin(\theta)d\theta, \qquad dy = \sin(\theta)\,d\rho + \rho\,\cos(\theta)d\theta$$

Calculando el elemento de arco,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2$$

Con lo que las coordenadas del tensor métrico serán

$$g_{\rho\rho} = 1,\;\; g_{\rho\theta} = g_{\theta\rho} = 0,\;\; g_{\theta\theta} = \rho^2$$

$$[\mathbf{g}]_{polares} = \begin{bmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\theta} \\ g_{\theta\rho} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas,

$$x = \rho \cos(\theta), \qquad y = \rho \sin(\theta) \qquad z = z$$

entonces,

$$dx = \cos(\theta)\, d\rho - \rho \sin(\theta) d\theta, \qquad dy = \sin(\theta)\, d\rho + \rho \cos(\theta) d\theta, \qquad dz = dz$$

Calculando el elemento de arco,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + dz^2$$

$$[\mathbf{g}]_{cilindricas} = \begin{bmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\theta} & g_{\rho z} \\ g_{\theta\rho} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{z\rho} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Coordenadas Esféricas

En coordenadas esféricas, el cambio de coordenadas es,

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta), \qquad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \qquad z = r\cos(\theta)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
dx &= \cos(\varphi)\sin(\theta)dr - r\sin(\varphi)\sin(\theta)d\varphi + r\cos(\varphi)\cos(\theta)d\theta \\
dy &= \sin(\varphi)\sin(\theta)dr + r\cos(\varphi)\sin(\theta)d\varphi + r\sin(\varphi)\cos(\theta)d\theta \\
dz &= \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Reemplazando en el elemento de arco, obtenemos,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

$$[\mathbf{g}]_{esfericas} = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{r\theta} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Cálculo invariante del Laplaciano

Laplaciano a partir del Análisis Tensorial

El Laplaciano en coordenadas esféricas y cilíndricas es intrincado para obtenerlo a partir de la simple sustitución de coordenadas y cálculo de derivadas segundas. Sin embargo, mediante técnicas del análisis tensorial, la expresión es mucho más sencilla

Técnica:

- Dado el cambio de coordenadas, tenemos las coordenadas del tensor métrico, $g_{\mu\nu}$
- Obtenemos, de manera matricial, el inverso, que llamamos $g^{\alpha\beta}$
- Llamemos g al determinante de $g_{\mu\nu}$

Con estas definiciones, calculamos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right]$$

El Laplaciano en Coordenadas Polares

En coordenadas polares

En polares, $g = \rho^2$, el

$$\left[\mathbf{g}^{-1}\right]_{polares} = \begin{bmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\theta} \\ g^{\theta\rho} & g^{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\rho\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\theta\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

El Laplaciano en Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas

En cilíndricas, $g = \rho^2$, el

$$[\mathbf{g}^{-1}]_{cilindricas} = \begin{bmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\theta} & g^{\rho z} \\ g^{\theta\rho} & g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{z\rho} & g^{z\theta} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\rho\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\theta\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\sqrt{\rho^2} g^{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

El Laplaciano en Coordenadas Esféricas

En coordenadas esféricas

En esféricas, $g = r^4 \sin^2(\theta)$, el

$$\left[\mathbf{g}^{-1}\right]_{esféricas} = \begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\varphi} & g^{r\theta} \\ g^{\varphi r} & g^{\varphi\varphi} & g^{\varphi\theta} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\varphi} & g^{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)}} \frac{\partial}{\partial r}\left[\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} g^{rr} \frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)}} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)}} \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} g^{\theta\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right] \end{aligned}$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta}\right]$$