Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales

Teorema de Existencia de Cauchy

- Series Formales
- Convergencia Uniforme. Funciones Mayorantes
- Teorema de Existencia de Cauchy
- Ecuaciones Diferenciales Analíticas en un Pequeño Parámetro

1. Introducción

Este material está dedicado a los aspectos fundamental de la Teoría de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de primer orden, con la condición de <u>*analiticidad*</u> de las funciones intervinientes. Esto significa, que dado un sistema de ecuaciones diferenciales, con condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} \frac{dx^\ell}{dt} &= f^\ell(x^1, x^2, \ldots, x^n; t) \\ x^\ell(t_0) &= x_0^\ell \qquad\qquad (\ell = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

Donde vamos a asumir que las funciones $f^\ell(x^1, x^2, \ldots, x^n; t)$ son analíticas en la región

$$|x^1 - x_0^1| < r'_1 \times |x^2 - x_0^2| < r'_2 \times \cdots \times |x^n - x_0^n| < r'_n \ \times |t - t_0| < T'$$

Las funciones $f^\ell(x^1, x^2, \ldots, x^n; t)$ son de $n+1$ variables complejas: complejas las coordenadas y complejo el tiempo.

El método de Cauchy consiste en obtener las series formales para las soluciones (integrales) del sistema, junto con el análisis de las convergencia uniforme de dichas soluciones.

1.1. Construcción de las series formales

La obtención de una solución puede provenir de métodos elementales de resolución, donde en el mejor de los casos podemos obtener la expresión analítica y cerrada de cada $x^\ell(t)$. Sin embargo, los problemas en los cuales la solución puede obtenerse de manera cerrada no constituyen la mayoría, sino, todo lo contrario.

Es por eso que es necesario construir un método que dé cuenta de la generalidad, para todo tipo de problemas. La solución del problema de valor inicial, (PVI) será buscada a través de una serie de potencia (serie de Taylor) en la forma:

$$x^\ell(t) = x^\ell(t_0) + \frac{dx^\ell}{dt}(t_0)\,(t - t_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x^\ell}{dt^2}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x^\ell}{dt^3}(t_0)(t - t_0)^3 + \cdots$$

Ahora, cada coeficiente de este desarrollo nos lo provee el propio sistema de ecuaciones diferenciales. Para los primeros términos, obtenemos:

- <u>Orden $\mathcal{O}\left[(t - t_0)^0\right]$:</u>

$$x^\ell(t_0) = x_0^\ell \qquad\qquad \text{(Cond. Inicial)}$$

- <u>Orden $\mathcal{O}\left[(t - t_0)^1\right]$:</u>

$$\frac{dx^\ell}{dt}(t_0) = f^\ell(x_0^j; t_0) \qquad\qquad \text{(Ec. Diferencial)}$$

- <u>Orden $\mathcal{O}\left[(t - t_0)^2\right]$:</u> Para obtener el coeficiente correspondiente a $(t - t_0)^2$ debemos calcular la $\frac{d^2x^\ell}{dt^2}$ y evaluarla en t_0

$$\frac{d^2x^\ell}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx^\ell}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[f^\ell(x^j; t)\right] = \frac{\partial f^\ell(x;t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^\ell}{\partial x^j}\,\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial f^\ell(x;t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^\ell}{\partial x^j}\, f^j(x;t)$$

- Y así sucesivamente...

2. Convergencia Uniforme de las Series Formales

El método presentado en la sección anterior nos proporciona un mecanismo para la obtención de las series formales, o bien para la obtención de desarrollos asintóticos[1]

Si bien el cálculo para ordenes altos puede hacerse cada vez más engorroso y complicado, la posibilidad de construir la serie es formalmente cierta.

Podemos notar, además, que cada término asociado a la potencia j en $(t-t_0)^j$ de la serie formal podrá representarse como

$$c_j^\ell = p_j^\ell(c_1^m, c_2^m, \ldots, c_{j-1}^m), \qquad \ell, m = 1, 2, \ldots n$$

donde los $p_j^\ell(c_1^m, c_2^m, \ldots, c_{j-1}^m)$ satisfacen las siguientes propiedades:

a) Los $p_j^\ell(c_1^m, c_2^m, \ldots, c_{j-1}^m)$ son polinomios en las variables $c_1^m, c_2^m, \ldots, c_{j-1}^m$

b) Los coeficientes de los $p_j^\ell(c_1^m, c_2^m, \ldots, c_{j-1}^m)$ son polinomios en las variables $c_1^m, c_2^m, \ldots, c_{j-1}^m$ son funciones lineales de los coeficientes de las expansiones de las funciones f^ℓ (desarrolladas en serie de Taylor en las $(n+1)$-variables).

c) Los coeficientes numéricos de los p_j^ℓ son números positivos.

Estas características son importantes a la hora analizar la convergencia.

2.1. Principio de la Función Mayorante

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx^\ell}{dt} &= f^\ell(x^1, x^2, \ldots, x^n; t) = f^\ell(x; t) \\ x^\ell(t_0) &= x_0^\ell \qquad\qquad (\ell = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

Supongamos que existen n funciones $F^\ell(x;t)$ tales que

$$\left|f^\ell(x;t)\right| \leq \left|F^\ell(x;t)\right| \qquad \forall \ell = 1, 2, \ldots, n$$

en las regiones definidas para las f^ℓ. Tales funciones $F^\ell(x;t)$ se las denominan *funciones mayorantes* de $f^\ell(x;t)$ en la región determinada.

El *Principio de la Mayorante* establece que si existe solución analítica para el sistema auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{dx^\ell}{dt} &= F^\ell(x; t) \\ x^\ell(t_0) &= x_0^\ell \qquad\qquad (\ell = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

Entonces, existirá solución analítica para el sistema original.

La demostración de este principio básicamente se sustenta en que las series formales para la solución del sistema mayorante tendrá coeficientes que acotarán término a término los de la solución del problema original, por lo tanto, si tenemos la serie acotada absolutamente por una serie uniformemente convergente, la original será también uniformemente convergente.

[1] En este contexto, por *desarrollo asintótico* vamos a entender la serie truncada a un determinado orden, es decir, el polinomio de Taylor.

3. Construcción de la Función Mayorante

Para construir la función mayorante, comencemos con la expresión para la función f^ℓ la cual asumimos analítica en el dominio ya mencionado. Entonces, como función de $n+1$ variables

$$f^\ell(x;t) = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n j_t = 0}^{\infty} a^\ell_{j_1 j_2 \cdots j_n j_t} (x^1 - x^1_0)^{j_1} (x^2 - x^2_0)^{j_2} \cdots (x^n - x^n_0)^{j_n} (t - t_0)^{j_t}$$

esto es, la serie de Taylor para esta función analítica de $n+1$ variables (complejas). Entonces los coeficientes se calculan como

$$a^\ell_{j_1 j_2 \cdots j_n j_t} = \frac{1}{j_1! j_2! \ldots j_n! j_t!} \left. \frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots+j_n+j_t}[f^\ell]}{\partial(x^1)^{j_1} \partial(x^2)^{j_2} \ldots \partial(x^n)^{j_n} \partial t^{j_t}} \right|_{(x^1_0, x^2_0, \ldots, x^n_0; t_0)}$$

Aplicando la fórmula de Cauchy para las derivadas, tenemos

$$a^\ell_{j_1 j_2 \cdots j_n j_t} = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \cdots \oint_{\gamma_n} \oint_{\gamma_t} \frac{f^\ell(x;t) \quad dx^1\, dx^2\, \ldots\, dx^n\, dt}{(x^1 - x^1_0)^{j_1+1} (x^2 - x^2_0)^{j_2+1} \cdots (x^n - x^n_0)^{j_n+1} (t - t_0)^{j_t+1}}$$

Donde las curvas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ vienen dadas por las ecuaciones

$$\gamma_j : \; |x^j - x^j_0| = r_j < r'_j, \qquad \gamma_t : \; |t - t_0| = T < T'$$

Notemos que cada curva se parametrizará

$$x^j - x^j_0 = r_j\, e^{i\,\theta_j}, \qquad 0 \le \theta_j \le 2\pi$$

Entonces, $dx^j = i r_j e^{i\,\theta_j} d\theta_j$ y además,

$$|x^j - x^j_0| = r_j, \qquad |dx^j| = r_j\, d\theta_j, \qquad \forall j,\ j = 1, 2, \ldots n$$

Sea M_ℓ una cota para $|f^\ell|$ en el dominio de integración (el máximo será en la frontera), podemos acotar:

$$|a^\ell_{j_1 j_2 \cdots j_n j_t}| \le \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \frac{M_\ell}{r_1^{j_1} r_2^{j_2} \cdots r_n^{j_n}\, T^{j_t}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_n\, d\theta_t$$

Entonces,

$$|a^\ell_{j_1 j_2 \cdots j_n j_t}| \le \frac{M_\ell}{r_1^{j_1} r_2^{j_2} \cdots r_n^{j_n}\, T^{j_t}}$$

Con estas cotas podemos definir la *función mayorante* para $f^\ell(x;t)$, $M(x;t)$

$$M^\ell(x;t) = M_\ell \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n j_t = 0}^{\infty} \left[\frac{(x^1 - x^1_0)}{r_1}\right]^{j_1} \left[\frac{(x^2 - x^2_0)}{r_2}\right]^{j_2} \cdots \left[\frac{(x^n - x^n_0)}{r_n}\right]^{j_n} \left[\frac{(t - t_0)}{T}\right]^{j_t}$$

Notemos que todas las sumatorias están separadas, por lo que podemos sumar cada serie geométrica, resultando

$$M^\ell(x;t) = \frac{M_\ell}{\left[1 - \frac{(x^1 - x^1_0)}{r_1}\right] \left[1 - \frac{(x^2 - x^2_0)}{r_2}\right] \cdots \left[1 - \frac{(x^n - x^n_0)}{r_n}\right] \left[1 - \frac{(t - t_0)}{T}\right]}$$

Si además, elegimos

$$M = \max_{\ell}\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}, \qquad r = \min_{\ell}\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$$

Podemos obtener una misma función mayorante para todas las funciones,

$$M(x;t) = \frac{M}{\left[1 - \frac{(x^1 - x_0^1)}{r}\right]\left[1 - \frac{(x^2 - x_0^2)}{r}\right]\cdots\left[1 - \frac{(x^n - x_0^n)}{r}\right]\left[1 - \frac{(t - t_0)}{T}\right]}$$

3.1. Integración del Sistema Auxiliar

Notemos entonces que el sistema asociado a las funciones mayorantes (que ahora son todas iguales) será

$$\frac{dx^\ell}{dt} = \frac{M}{\left[1 - \frac{(x^1 - x_0^1)}{r}\right]\left[1 - \frac{(x^2 - x_0^2)}{r}\right]\cdots\left[1 - \frac{(x^n - x_0^n)}{r}\right]\left[1 - \frac{(t - t_0)}{T}\right]}$$

para todo $\ell = 1, 2, \ldots n$. Entonces, tenemos

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{dx^2}{dt} = \cdots = \frac{dx^n}{dt}$$

Integrado entre t_0 y t tendremos

$$x^1(t) - x_0^1 = x^2(t) - x_0^2 = \cdots = x^n(t) - x_0^n$$

Definamos entonces la variable

$$\xi(t) = x^1(t) - x_0^1 = x^2(t) - x_0^2 = \cdots = x^n(t) - x_0^n$$

donde

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left[1 - \frac{\xi}{r}\right]\left[1 - \frac{\xi}{r}\right]\cdots\left[1 - \frac{\xi}{r}\right]\left[1 - \frac{(t - t_0)}{T}\right]}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left[1 - \frac{\xi}{r}\right]^n\left[1 - \frac{(t - t_0)}{T}\right]}$$ (Goursat, *Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, 1918)

Que también puede sustituirse por otra función mayorante de esta última

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left[1 - \frac{n\,\xi}{r}\right]\left[1 - \frac{(t - t_0)}{T}\right]}$$ (Moulton, *Differential Equations*, 1930)

En ambos casos, la condición para $t = t_0$ es $\xi(t_0) = 0$.

3.1.1. Integración de la ecuación diferencial con la Mayorante $\frac{M}{\left[1-\frac{\xi}{r}\right]^n\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]}$

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{M}{\left[1-\frac{\xi}{r}\right]^n\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]} \\ \xi(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación es elemental, ya que es a variables separables, por lo que para integrarlo hacemos

$$\left[1-\frac{\xi}{r}\right]^n d\xi = \frac{M}{\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]}\, dt, \qquad \xi(t_0)=0$$

$$-\frac{r}{n+1}\left[1-\frac{\xi}{r}\right]^{n+1} + \frac{r}{n+1} = -M\,T\,\ln\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]$$

Despejando $\xi(t)$ resulta

$$\xi(t) = r\left\{1-\sqrt[n+1]{1+(n+1)\,M\,\frac{T}{r}\ln\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]}\,\right\}$$

Para estudiar la analiticidad de la solución para $\xi(t)$, que condicionará la analiticidad para las $x^\ell(t)$, debemos tener en cuenta que la raíz $n+1$-ésima posee el límite de analiticidad en el 0, por lo que debemos considerar como límite

$$1+(n+1)\,M\,\frac{T}{r}\ln\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right] = 0$$

que, despejando $t-t_0$ obtenemos:

$$t-t_0 = T\left[1-e^{-\frac{r}{(n+1)M\,T}}\right]$$

O, en términos de cota de validez de la solución,

$$|t-t_0| < T\left[1-e^{-\frac{r}{(n+1)M\,T}}\right]$$

Lo que significa que dentro de este intervalo en t las funciones $x^\ell(t)$ serán analíticas con series uniformemente convergentes, en virtud del principio de la mayorante.

El dominio de analiticidad para la solución $x(t)$ es menor que el intervalo de analiticidad en la variable t para las funciones $f^\ell(x;t)$. Esto es esperable.

En algunos problemas de la dinámica no lineal el límite de analiticidad -en la variable t- de las funciones se asocia con eventos tipo catastróficos. Más precisamente, en soluciones obtenidas por aproximaciones de tipo perturbativas, estos límites son considerados en algunas ocasiones como *tiempos de evento*. En particular, para Teorías Hamiltonianas de Perturbación, estimaciones exponenciales para los límites de analiticidad aparecen en los trabajos clásicos como por ejemplo de Nekhoroshev (Nekhoroshev, *An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems*, Russ. Math. Surv. **32** 1).

3.1.2. Integración de la ecuación diferencial con la Mayorante $\frac{M}{\left[1-\frac{n\,\xi}{r}\right]\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]}$

Consideremos ahora el sistema auxiliar

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left[1-\frac{n\,\xi}{r}\right]\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]} \qquad \xi(t_0) = 0$$

Análogamente, dado que la ecuación diferencial es a variables separables, podemos escribir

$$\left[1-\frac{n\,\xi}{r}\right] d\xi = \frac{M}{\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]}\,dt$$

Entonces,

$$\xi - \frac{n\,\xi^2}{2r} = -\,M\,T\,\ln\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]$$

Despejando ξ en función de t se obtiene

$$\xi(t) = \frac{r}{n}\left\{1 \pm \sqrt{1+2\,n\,\frac{M\,T}{r}\ln\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]}\right\}$$

donde se debe tomar el signo menos, ya que al evaluar en $t = t_0$ $\xi = 0$, por lo tanto

$$\xi(t) = \frac{r}{n}\left\{1 - \sqrt{1+2\,n\,\frac{M\,T}{r}\ln\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right]}\right\}$$

El límite de analiticidad se obtendrá igualando a cero el radicando:

$$1+2\,n\,\frac{M\,T}{r}\ln\left[1-\frac{(t-t_0)}{T}\right] = 0$$

Entonces, despejando,

$$t-t_0 = T\left[1-e^{-\frac{r}{2\,n\,M\,T}}\right]$$

Entonces, la solución $\xi(t)$ será analítica (y en consecuencia las $x^\ell(t)$) en la región

$$t-t_0 < T\left[1-e^{-\frac{r}{2\,n\,M\,T}}\right]$$

Esta función mayorante conduce a una estimación del intervalo de analiticidad un poco mayor que el obtenido con la función mayorante anterior.

Si la función f^ℓ no depende de t, tendremos que $T \to \infty$ y la expresión para la región de analiticidad será

$$t-t_0 < T\left[1-\left(1-\frac{r}{2\,n\,M\,T}+\mathcal{O}(T^{-2})\right)\right]$$

$$t-t_0 < \left[\frac{r}{2\,n\,M}+\mathcal{O}(T^{-1})\right]$$

Tomando límite para $T \to \infty$ obtenemos

$$t-t_0 < \frac{r}{2\,n\,M}$$

Un análisis similar se puede hacer con el intervalo obtenido con la anterior función mayorante.

4. Sistemas de Ecuaciones Analíticos en un Pequeño Parámetro

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx^\ell}{dt} &= g^\ell(x;t) + \varepsilon\, f^\ell(x;\varepsilon;t) \\ x^\ell(t_0) &= x_0^\ell, \qquad\qquad (\ell = 1,2,\dots n) \end{aligned}$$

El problema asociado a $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dx_0^\ell}{dt} &= g^\ell(x_0(t);t) \\ x_0^\ell(t_0) &= a^\ell, \qquad\qquad (\ell = 1,2,\dots n) \end{aligned}$$

es el denominado *problema no perturbado.*

Utilizaremos el subíndice 0 de la siguiente manera: para x_0 se usa como solución del problema no perturbado. Y en t_0 como valor inicial en la variable t.

A diferencia con lo planteado en las secciones anteriores, vamos a considerar o que el problema no perturbado admite solución analítica en la región

$$|x_0^\ell - a_\ell| \le r_\ell^0, \qquad |t - t_0| \le T$$

o bien que las funciones $g^\ell(x_0;t)$ son analíticas en la región $|x_0^\ell - a_\ell| \le r_\ell^0$ y continuas en la variable t, en la región $|t - t_0| \le T$.

Dependiendo de las hipótesis con las que trabajemos podremos encontrar soluciones para los problemas con diferencias respecto a los intervalos de validez en el parámetro ε.

Supongamos que por algún método elemental podemos obtener la solución para el problema no perturbado, es decir, $x_0^\ell(t) = \phi^\ell$, tal que

$$\frac{d\phi^\ell}{dt} = g^\ell(\phi;t), \qquad \text{con } \phi^\ell(t_0) = a_\ell \qquad \phi = (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n)$$

En adelante seguiremos trabajando con las funciones x_0^ℓ. No debemos olvidar que estas son funciones de t, no constantes de valor inicial (que hemos llamado a_ℓ)

4.1. Ecuaciones de Perturbación

A partir del sistema de ecuaciones y la solución del problema no perturbado, vamos a proponer una solución para el sistema una expresión de la forma

$$x^\ell(t) = x_0^\ell(t) + \varepsilon\, x_1^\ell(t) + \varepsilon^2\, x_2^\ell(t) + \cdots$$

e imponer las condiciones que deben satisfacer las funciones x_j^ℓ igualando órdenes en el parámetro ε. Partimos como base que la solución para $\varepsilon = 0$ fue obtenida a partir de un método determinado.

Primero, calculemos la derivada:

$$\frac{dx^\ell}{dt} = \frac{dx_0^\ell}{dt} + \varepsilon\,\frac{dx_1^\ell}{dt} + \varepsilon^2\,\frac{dx_2^\ell}{dt} + \cdots$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, tenemos

$$\frac{dx_0^\ell}{dt}+\varepsilon\,\frac{dx_1^\ell}{dt}+\varepsilon^2\,\frac{dx_2^\ell}{dt}+\cdots=g^\ell(x_0+\varepsilon\,x_1+\varepsilon^2\,x_2+\cdots;t)+\varepsilon f^\ell(x_0+\varepsilon\,x_1+\varepsilon^2\,x_2+\cdots;\varepsilon;t)$$

Entonces, desarrollando las funciones g^ℓ y f^ℓ respecto el parámetro ε obtenemos, para cada función:

$$g^\ell(x_0+\varepsilon\,x_1+\varepsilon^2\,x_2+\cdots;t)=g^\ell(x_0;t)+\varepsilon\sum_j\frac{\partial g^\ell}{\partial x^j}(x_0)\,x_1^j+\varepsilon^2\left[\sum_j\frac{\partial g^\ell}{\partial x^j}(x_0)\,x_2^j+\sum_{j,k}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^\ell}{\partial x^k\partial x^j}(x_0)x_1^kx_1^j\right]+\cdots$$

Ahora debemos hacer el desarrollo de Taylor para las funciones $f^\ell(x;\varepsilon;t)$ respecto del parámetro ε

$$\begin{aligned}
f^\ell(x;\varepsilon;t) &= f^\ell(x_0;0;t)+\varepsilon\left\{\frac{\partial f^\ell}{\partial\varepsilon}+\sum_j\frac{\partial f^\ell}{\partial x^j}\left[x_1^j+2\varepsilon x_2^j+\cdots\right]\right\}_{\varepsilon=0}+\\
&+ \frac{\varepsilon^2}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f^\ell}{\partial\varepsilon^2}+\sum_{j,k}\frac{\partial^2 f^\ell}{\partial x^j\partial x^k}\left[x^k+2\varepsilon x_2^k\cdots\right]\left[x^j+2\varepsilon x_2^j\cdots\right]+\right.\\
&+ \left.\sum_j\frac{\partial f^\ell}{\partial x^j}\left[2x_2^j+3\cdot 2\,\varepsilon\,x_3^j+\cdots\right]\right\}_{\varepsilon=0}
\end{aligned}$$

Evaluando en $\varepsilon=0$ e igualando mismos órdenes en el parámetro ε, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dx_0^\ell}{dt} &= g^\ell(x_0;t)\\
\frac{dx_1^\ell}{dt} &= \sum_j\frac{\partial g^\ell}{\partial x^j}(x_0;t)\,x_1^j+f^\ell(x_0;0;t)\\
\frac{dx_2^\ell}{dt} &= \sum_j\frac{\partial g^\ell}{\partial x^j}(x_0;t)\,x_2^j+\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2 g^\ell}{\partial x^k\partial x^j}(x_0)x_1^kx_1^j+\frac{\partial f^\ell}{\partial\varepsilon}(x_0;0;t)+\sum_j\frac{f^\ell}{\partial x^j}(x_0;0;t)\,x_1^j\\
\vdots &= \vdots\\
\frac{dx_m^\ell}{dt} &= \sum_j\frac{\partial g^\ell}{\partial x^j}(x_0;t)\,x_m^j+\mathcal{F}(x_0,x_1,\cdots,x_{m-1};t)\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Es decir, se va resolviendo en cascada: primero resolvemos la primera ecuación, obteniendo x_0. Luego, introducimos esta solución en la segunda ecuación y obtenemos x_1, y así sucesivamente. Tengamos en cuenta que al imponer que $x_0^\ell(t_0)=a^\ell$. Entonces, para $m\geq 1$ se tiene

$$x_m^\ell(t_0)=0$$

Si bien el procedimiento se va haciendo cada vez más engorroso, nada impide -en términos formales- de ir obteniendo cada término de orden superior.

Además, como ℓ toma los valores desde 1 a n, tenemos para cada x_m^ℓ un sistema lineal

- Para $x_1(t)$ tenemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1^1}{dt} \\ \frac{dx_1^2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_1^n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1}(x_0;t) & \frac{\partial g^1}{\partial x^2}(x_0;t) & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^n}(x_0;t) \\ \frac{\partial g^2}{\partial x^1}(x_0;t) & \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x_0;t) & \cdots & \frac{\partial g^2}{\partial x^n}(x_0;t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1}(x_0;t) & \frac{\partial g^n}{\partial x^2}(x_0;t) & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^n}(x_0;t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^n \end{bmatrix}$$

- Para $x_m(t)$, con $m \geq 1$:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_m^1}{dt} \\ \frac{dx_m^2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_m^n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1}(x_0;t) & \frac{\partial g^1}{\partial x^2}(x_0;t) & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^n}(x_0;t) \\ \frac{\partial g^2}{\partial x^1}(x_0;t) & \frac{\partial g^2}{\partial x^2}(x_0;t) & \cdots & \frac{\partial g^2}{\partial x^n}(x_0;t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1}(x_0;t) & \frac{\partial g^n}{\partial x^2}(x_0;t) & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^n}(x_0;t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ \vdots \\ x_m^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_m^1(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}; t) \\ F_m^2(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}; t) \\ \vdots \\ F_m^n(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}; t) \end{bmatrix}$$

Recordemos que los subíndices indican el término asociado a la potencia en el parámetro ε, el supraíndice j a la j-ésima coordenadas y cuando no usamos contraíndices es porque estamos considerando la magnitud vectorial completa.

En la próxima sección vamos a analizar la convergencia uniforme de los desarrollos teniendo en cuenta que las funciones

$$g^\ell(x;\varepsilon;t) + \varepsilon\, f^\ell(x;\varepsilon;t)$$

son analíticas en las variables complejas x y ε y continuas en la variable (en principio compleja) t.

4.2. Convergencia Uniforme de los Desarrollos en serie

Vamos ahora a analizar el comportamiento de las series (ahora series de funciones) para la solución del sistema de ecuaciones completo. En este caso, debemos tener en cuenta que las series que estamos analizando son las definidas como

$$x(t) = x_0 + \varepsilon\, x_1 + \varepsilon^2\, x_2 + \cdots$$

donde cada término es un vector de n componenetes. Además, para las funciones

$$g^\ell(x;\varepsilon;t) + \varepsilon\, f^\ell(x;\varepsilon;t)$$

vamos a suponer

- Analiticidad respecto a x y a ε
- Continuidad respecto a t

Bajo estas hipótesis, vamos a considerar entonces que el sistema de ecuaciones diferenciales podrá escribirse como

$$\frac{dx^\ell}{dt} = \sum_{j_1, j_2, \ldots j_n; j_\varepsilon} c^\ell_{j_1, j_2, \ldots j_n; j_\varepsilon}\, (x^1 - x_0^1)^{j_1}\, (x^2 - x_0^2)^{j_2} \cdots (x^n - x_0^n)^{j_n}\, \varepsilon^{j_\varepsilon}$$

para cada ℓ desde 1 a n.

Recordemos además que cada factor

$$x^j - x_0^j = x^j(t) - x_0^j(t)$$

pero que al considerar funciones continuas en t y no analíticas, los desarrollos de Taylor no serán en t, sino en las coordenadas y el pequeño parámetro, ε.

4.2.1. Función Mayorante

De manera análoga a lo hecho para la obtención de las funciones mayorantes en las secciones anteriores, vamos a considerar -con las diferencias del caso- cotas superiores para las funciones

$$g^\ell(x;\varepsilon;t) + \varepsilon\, f^\ell(x;\varepsilon;t).$$

Sea M una cota comun para todas las funciones (es decir, para todos los $\ell = 1, 2, ..., n$).

A partir de un tratamiento similar podemos obtener que para el sistema de ecuaciones diferenciales podemos definir el sistema auxiliar (con la función mayorante igual para todas las ecuaciones)

$$\begin{aligned}
\frac{dX^\ell}{dt} &= M\,\frac{\left[\frac{X^1+X^2+\cdots+X^n}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right]\left[1 + \frac{X^1+X^2+\cdots+X^n}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right]}{\left[1 - \frac{X^1+X^2+\cdots+X^n}{r} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right]} \\
X^\ell(t_0) &= 0, \qquad\qquad X^\ell = x^\ell - x_0^\ell
\end{aligned}$$

Observando que todas las ecuaciones diferenciales tienen la misma función en el miembro derecho, podemos definir (y reducir a una sola variable, como lo hecho anteriormente)

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= M\,\frac{\left[\frac{n\,X}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right]\left[1 + \frac{n\,X}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right]}{\left[1 - \frac{n\,X}{r} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right]} \\
X(t_0) &= 0, \qquad\qquad X^\ell = x^\ell - x_0^\ell
\end{aligned}$$

Si redefinimos:

$$\xi = \frac{n\,X}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$$

podemos reescribir la ecuación diferencial

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M\,r}{n}\,\frac{\xi\,(1+\xi)}{(1-\xi)}, \qquad\qquad \xi(t_0) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$$

Nuevamente, hemos podido reducir el sistema a una única ecuación diferencial que además, es a variables separables.

La solución de la ecuación será,

$$\xi + 1 = \frac{1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}}{2\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}}\, e^{-n\,M\,\frac{t-t_0}{r}}\,\left[1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\,e^{n\,M\,\frac{t-t_0}{r}}}\,\right]$$

Para determinar el dominio de analiticidad debemos considerar el límite de analiticidad de esta solución, por lo que debemos resolver la ecuación

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\, e^{n\,M\,\frac{t-t_0}{r}} = 0$$

cuya solución será

$$\varepsilon = \varepsilon' \left[-1 + 2e^{n\,M\,\frac{t-t_0}{r}} \pm \sqrt{\left(1 - 2\,e^{n\,M\,\frac{t-t_0}{r}}\right)^2 - 1}\,\right]$$

Con el signo negativo tenemos una cota mínima. Trabajando algebraicamente, podemos obtener la cota de analiticidad en el parámetro ε,

$$|\varepsilon| < \varepsilon' \, \frac{1 - \sqrt{1 - e^{-n\,M\,\frac{t-t_0}{r}}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-n\,M\,\frac{t-t_0}{r}}}}$$

Las series formales para las soluciones del sistema convergen bajo esta última condición respecto del parámetro ε.