Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

VI

Aspectos Geométricos I:

Difeomorfismos. Flujos de Fase.

Octavio Miloni

1 Introducción

Este capítulo estará dedicado a aspectos geométricos de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Por aspectos geométricos entenderemos relaciones que satisfacen las soluciones de un determinado sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Hallar integrales de movimiento, relaciones invariantes, como así también estudiaremos las condiciones que deben satisfacer los cambios de coordenadas para preservar determinadas cantidades o relaciones.

Para este propósito introduciremos conceptos tales como *grupo de transformaciones*, *transformaciones uno paramétricas*, *grupo de difeomorfismos uno paramétrico* y todo lo relacionado a las soluciones de determinado sistema de ecuaciones, vistas como un flujo.

Finalmente, este estudio será encarado desde lo particular hacia lo más general, partiendo de sistemas lineales, para luego estudiar sistemas más generales.

2 Grupo de Transformaciones

Definición. *Una transformación sobre un conjunto M es una aplicación biyectiva de M en M.*

Con esta definición podemos notar que

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$ no es una transformación.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^3$ es una transformación.
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida como $f(z) = z^4$ no es una transformación.

En el conjunto de transformaciones vamos a definir un producto $f \cdot g$ a partir de la composición:

$$(f \cdot g)(x) = f(g(x))$$

Dado que tanto f como g son transformaciones, podemos notar que con este producto, las transformaciones de un conjunto en sí mismo forman un grupo. En general, no conmutativo.

Definición. *Una función $\varphi : G \to H$ de un grupo en otro se denomina homomorfismo asocia producto a productos en la imagen e inversa en inversa en la imagen. Esto es,*

$$\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g), \qquad \varphi(f^{-1}) = (\varphi(f))^{-1}$$

3 Grupo uno-paramétrico de Transformaciones

Un grupo uno-paramétrico de transformaciones es una aplicación de los reales al grupo de transformaciones, esto es:

$$t \quad \to \quad g^t, \qquad \text{con } g^t \text{ una transformación en el conjunto } M$$

que satisface

a) $g^{t+s} = g^t \cdot g^s$

b) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$

Notemos que a partir de la propiedad a), g^0 es la transformación identidad.
En el contexto de las ecuaciones diferenciales, t es el tiempo y g^t es la evolución temporal.

Como ejemplo, consideremos $M = \mathbb{R}$ y g^t una traslación por $3t$, entonces

$$g^t(x) = x + 3t$$

En cambio si el conjunto M es $\mathbb{R}$ y g^t viene dada por

$$g^t(x) = x\cos(t)$$

no satisface las propiedades.

En el contexto de los sistemas provenientes de la dinámica teórica, es común denominar al grupo uno-paramétrico de transformaciones g^t como *flujo de fases*, donde el conjunto M donde actúa el grupo se denomina *espacio de fases*. Además, variando el parámetro t tenemos las denominadas *órbitas* o *trayectorias*.

4 Grupo de Difeomorfismos uno-paramétricos

Un difeomorfirmo es una aplicación biyectiva donde tanto la función como su inversa son diferenciables.

Un grupo de difeomorfismos uno-paramétricos es el grupo de transformaciones donde $g^t(x)$ es un difeomorfismo, tanto en la variable x y en el parámetro t.

5 Sistemas Lineales Homogéneos

Dado un sistema lineal homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\vec{x}, \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

La solución del problema de valor inicial viene dada, como se ha visto

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t, t_0)\,\vec{x}_0, \qquad \mathbf{\Psi}(t, t_0) = \mathbf{U}(t)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0)$$

donde $\mathbf{U(t)}$ es la *matriz fundamental*.

Para este problema, definamos $g^t = \mathbf{\Psi}(t, t_0)$
Notemos que

- $g^{t_0} = \mathbf{\Psi}(t, t_0) = \mathbf{U}(t_0)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$
- $g^{t_2}g^{t_1} = \mathbf{\Psi}(t_2 + t_1, t_1)\mathbf{\Psi}(t_1, t_0) = \mathbf{U}(t_2 + t_1)\,\mathbf{U}^{-1}(t_1)\mathbf{U}(t_1)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0) = \mathbf{\Psi}(t_2 + t_1, t_0) = \mathbf{U}(t_2 + t_1)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0) = g^{t_2+t_1}$

Como se ha visto, entonces, la evolución temporal es el grupo uno-paramétrico de difeomorfismos. En este caso, la identidad está asociada a g^{t_0} y no a g^0, pero eso se debe a que la condición inicial se fija en t_0 y no en $t = 0$.

6 El Campo Velocidad de Fase

Con la definición de flujo de fase, definido a partir del grupo de difeomorfismos uno-paramétricos, vamos a definir el *campo vectorial velocidad de fase.*

Dado el conjunto M (en el contexto de la geometría de las ecuaciones diferenciales, este conjunto debe tener una estructura de *variedad diferenciable*) y dado la transformación g^t, vamos a introducir el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h}$$

En virtud de la propiedad de grupo, podemos escribir

$$\frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h} = \frac{g^h\left[g^t(\mathbf{x})\right] - \left[g^t(\mathbf{x})\right]}{h} = \frac{g^{0+h}\left[g^t(\mathbf{x})\right] - g^0\left[g^t(\mathbf{x})\right]}{h}$$

Si llamamos $\mathbf{y} = g^t(\mathbf{x})$ podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h} = \frac{g^{0+h}(\mathbf{y}) - g^0(\mathbf{y})}{h}$$

Con esta relación, vamos a definir el *campo velocidad de fase*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left[g^t(\mathbf{x})\right]$$

Ejemplos. Consideremos el flujo de fase

$$g^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g^t(x) = e^{\lambda t}x$$

Calculando la derivada, tenemos

$$\frac{d}{dt}g^t(x) = \lambda e^{\lambda t}x$$

Entonces, evaluando en $t = 0$, como plantea la definición, tenemos

$$v(x) = \lambda e^{\lambda 0}x, \quad \to \quad v(x) = \lambda x$$

Consideremos ahora, el flujo de fase definido en $\mathbb{R}^2$

$$g^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Derivando, tenemos

$$\frac{d}{dt}g^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Evaluando en $t = 0$, tenemos finalmente

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \to \quad \begin{matrix} v_x = y \\ v_y = -x \end{matrix}$$

7 Flujo de Fase como Solución de Ecuaciones Diferenciales

Si consideramos un punto particular de $M = \mathbb{R}^n$, llamémoslo $\vec{x}_0$ y sea la transformación

$$\varphi(t) = g^t(\vec{x}_0)$$

Entonces podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema. *La función $\varphi(t)$ definida como*

$$\varphi(t) = g^t(\vec{x}_0)$$

es solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$$

con condición inicial $\varphi(0) = \vec{x}_0$.

En efecto, consideremos

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g^{t+h}(\vec{x}_0) - g^t(\vec{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g^h[g^t(\vec{x}_0)] - g^0[g^t(\vec{x}_0)]}{h} = \vec{v}(\vec{x})$$

Entonces,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}), \quad \text{con la condición,} \quad g^{t_0}(\vec{x}_0) = Id(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$$

Con este resultado, a cada difeomorfismo uno-paramétrico podemos asociar un problema de valor inicial, y viceversa.

Definición. *El flujo de fase de la ecuación diferencial $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ es el grupo de difeomorfismos uno-paramétrico para el cual $\vec{v}$ es el campo vectorial velocidad de fase.*

Ejemplo. El flujo de fase del sistema

$$\begin{aligned} v_x &= \tfrac{dx}{dt} = y \\ v_y &= \tfrac{dy}{dt} = -x \end{aligned}$$

Es el grupo uno paramétrico de rotaciones de ángulo t en el plano xy.

$$g^t = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Más aún, si $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$, la órbita vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = g^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) \\ y(t) &= -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \end{aligned}$$

La manera de obtener la expresión del flujo de fase es resolviendo las ecuaciones diferenciales. Este capítulo aporta aspectos vinculados con la geometría, pero no elude de manera alguna la resolución de los sistemas por los métodos que ya hemos estudiado.

Ejemplo. Encontremos la expresión del flujo de fase para la ecuación diferencial

$$v(x) = x^2, \quad \text{con condición inicial en } t = 0$$

Dada la separabilidad de la ecuación, podemos resolver trivialmente

$$-\frac{1}{x} = t + C, \qquad \to \qquad C = -\frac{1}{x_0}$$

Con lo cual, el flujo de fase es el difeomorfismo uno-paramétrico

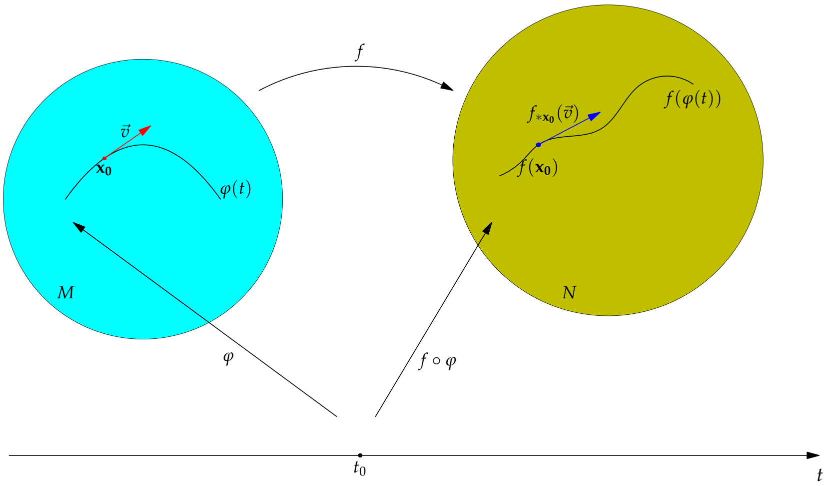
$$x(t) = g^t(x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0\, t}$$

8 Transformaciones Diferenciables sobre Vectores y Campos

Vamos a estudiar ahora la acción de funciones diferenciables aplicadas a vectores y a campos vectoriales.

Para realizar este estudio, consideremos dos dominios M y N de espacios vectoriales. Consideremos un vector $\vec{v}$ aplicado en un punto $\mathbf{x}$. Este punto además pertenece a una determinada curva, donde $\vec{v}$ es el tangente en ese punto particular. Consideremos una aplicación $f : M \to N$. Esta aplicación transforma la curva (transformando cada punto) en otra curva en el conjunto N. En particular, el punto $\mathbf{x}$ lo transforma en N al punto $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. De la misma manera, a cada punto de la curva $\varphi(t)$ transformará en la curva $f(\varphi(t))$.

Denotemos con $f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v})$ al vector en N, transformado de $\vec{v}$.



La imagen del vector $\vec{v}$ bajo la transformación f es el vector velocidad con el que se mueve el punto $f(\varphi(t))$ lleva al punto $\mathbf{x_0}$ que es $\varphi(t_0)$ cuya velocidad es el vector $\vec{v}$.

Considerando que la función f es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ podemos calcular $f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v})$ a través de

$$f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f(\varphi(t)), \qquad \text{con} \qquad \varphi(t_0) = \mathbf{x_0}, \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi(t) = \vec{v}$$

Observación. No suponer que la derivada termina dando un número, ya que el resultado debe ser el vector en N. Si $M = N = \mathbb{R}^3$ tendremos que $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$

$$f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v}) = Df(\mathbf{x_0}) \cdot \vec{v}, \qquad \text{donde } Df \text{ es el Jacobiano de } f, \;\; Df = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

Definición: El Espacio Tangente. *El conjunto de los vectores velocidad en un punto dado $\mathbf{x_0}$ de movimientos que llevan $\mathbf{x}$ a través de una parametrización $\varphi(t)$ es un espacio vectorial, que posee la misma dimensión que el espacio por donde se lleva a cabo el movimiento, M. Este espacio se denomina espacio tangente a M en el punto $\mathbf{x_0}$ y es denotado $T_{\mathbf{x_0}}M$.*

Definición. *El operador lineal $f_{\mathbf{x_0}*}$ es denominado derivada de la función f en el punto $\mathbf{x_0}$.*

Ejemplo: La función de Whitney (función cúspide). Consideremos la función del plano en sí mismo:

$$f(x,y) = (x^3 + xy, y)$$

hallemos el conjunto de puntos del plano para el cual el operador lineal derivada $f_{\mathbf{x}*}$ es degenerado y transformemos por f dicho conjunto.
Primero obtengamos el Jacobiano de f que será la expresión en componentes de la derivada.

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x^2 + y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

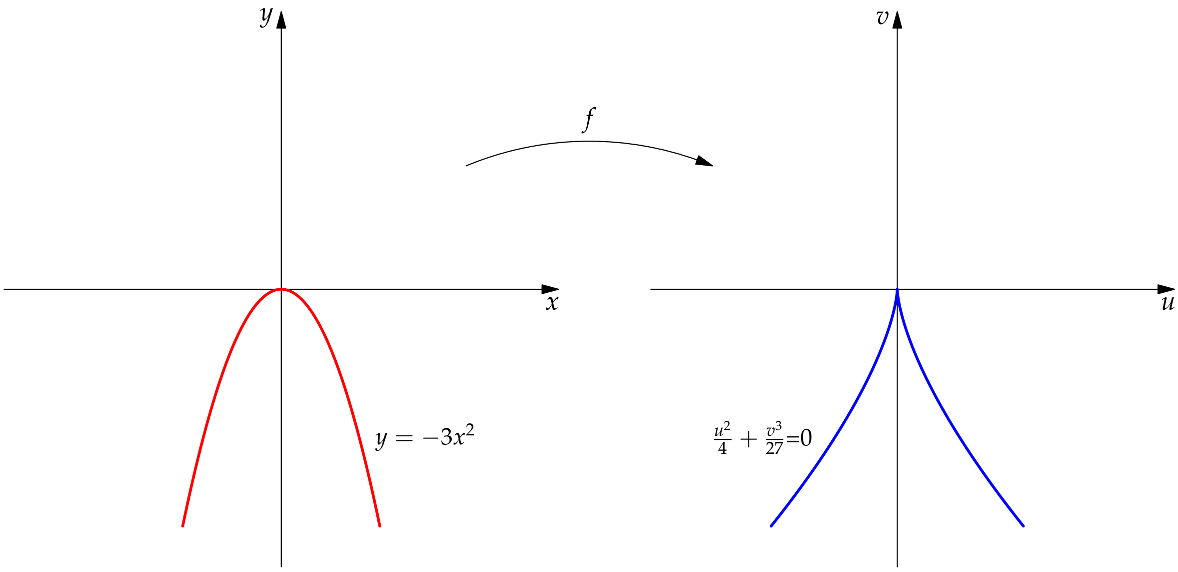
La transformación será degenerada cuando el Jacobiano tenga determinante nulo, por lo que el conjunto del plano donde hay degeneración será $y = -3x^2$.

Al transformar este conjunto a través de f, tendremos (llamando al plano transformado uv),

$$u = -2x^3, \quad v = y$$

Como la condición es que $y = -3x^2$ podemos relacionar u y v eliminando la variable x, donde obtenemos

$$u = -2x^3, \quad v = -3x^2, \quad \to \quad \frac{u^2}{4} + \frac{v^3}{27} = 0$$



Notemos que si bien la función f es diferenciable esta produce, para el conjunto de degeneración de la derivada una estructura de cúspide. Este aporte de H. Whitney se generaliza diciendo que toda función próxima a f tiene una singularidad de cúspide cercana al origen.

Observación. Las estructuras de espacio tangente pueden ser definidas sin necesidad de ambientarla en $\mathbb{R}^n$. Como se ha mencionado -sólo mencionado- la estructura ambiente necesaria es la de *variedad diferenciable.*

Definición. *Un vector tangente a un dominio M en el punto $\mathbf{x_0}$ es una clase de equivalencia de movimientos suabes $\varphi : \mathbb{R} \to M$ para los cuales $\varphi(t_0) = \mathbf{x_0}$. La equivalencia $\varphi \equiv \psi$ es definida a partir de la siguiente condición: la distancia entre los puntos $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ en algún sistema de coordenadas es de orden $\mathcal{O}(|t - t_0|)$.*

9 Acción de Difeomorfismos sobre Campos Vectoriales

Definición. *Un campo vectorial $\vec{v}$ es definido en un dominio M si para cada punto $\mathbf{x}$ tiene asignado un vector $\vec{\mathbf{x}} \in T_{\mathbf{x}}M$, dependiendo suavemente con en cada punto de M.*

Sea g el difeomorfismo de un dominio M en N. La imagen $g_*(\vec{v})$ del campo $\vec{v}$ en M el el campo $\vec{w}$ en N definido por la fórmula

$$\vec{w}(\mathbf{y}) = g_*(\vec{v}(\mathbf{x})), \quad \text{con} \quad \mathbf{x} = g^{-1}(\mathbf{y}).$$

Ejemplo. Consideremos en $\mathbb{R}$ la transformación lineal $g(x) = a\,x$. Consideremos el campo vectorial $v = 1$. Entonces,

$$w(y) = g_*(v) = Dg(x)\,v = a\,v$$

En el caso unidimensional, podemos notar que la cuenta para aplicar el difeomorfismo a un determinado campo es

$$g_*(v) = \frac{\partial}{\partial x}(g) \cdot v = v \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g)$$

Es por esta razón que comúnmente se denota al campo vectorial (en el caso unidimensional, todavía) v como

$$\vec{v} = v \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

De esta manera, al aplicar un difeomorfismo haremos

$$g_*(v) = v \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g)$$

Esta notación es consistente para la reescritura de los campos a partir de la aplicación de un difeomorfismo: En el ejemplo dado, en el que el campo era v constante, y que el difeomorfismo $g = ax$ (es decir, $y = ax$) tendremos

$$w(y) = w\frac{\partial}{\partial y} = g_*(v) = v\frac{\partial}{\partial x}(g) = a\,v\frac{\partial}{\partial y}, \quad \to \quad w = a\,v$$

Este ejemplo no es más que un cambio de coordenadas, $y = a\,x$, y la "base" $\frac{\partial}{\partial x}$ se transforma según la regla de la cadena conocida

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(y/a)} = a \cdot \frac{\partial}{\partial y} \quad \to \quad v \cdot \frac{\partial}{\partial x} = a\,v \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

En este caso, el difeomorfismo del ejemplo no es otra cosa que un mero cambio de coordenadas.

Ejemplo. Consideremos el difeomorfismo $y = e^x$. Consideremos el campo vectorial

$$v = v(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = x \cdot \frac{\partial}{\partial x}.$$

Entonces, la acción del difeomorfismo resulta

$$g_*(v) = v(x) \cdot \left.\frac{\partial e^x}{\partial x}\right|_{x=\ln(y)} = \ln(y)\, y$$

Esta aplicación es consistente con la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(\ln(y))} = y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

Entonces, el campo se reescribe

$$x \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \ln(y) \cdot \frac{\partial}{\partial(\ln(y))} = \ln(y)\, y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

Otro Ejemplo. Consideremos ahora un campo en $\mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x, y)$. Consideremos el difeomorfismo $g = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (u, v)$ Entonces, la expresión para $g_*(\vec{v})(x)$ será

$$g_*(\vec{v}(x, y)) = Dg_{(u,v)} \cdot \vec{v}(u, v), \quad \text{con } x = x(u, v),\ y = y(u, v) \text{ por inversión}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} w_u &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\, v_x(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial f_1}{\partial y}\, v_y(x(u, v), y(u, v)) \\ w_v &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\, v_x(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial f_2}{\partial y}\, v_y(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

9.1 Generalización del concepto de base para campos vectoriales

Vamos a generalizar la notación sugerida para campos vectoriales. Si $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ es un sistema de coordenadas en $\mathbb{R}^n$, entonces la base para campos vectoriales son denotadas (para componentes en las direcciones de los ejes cartesianos)

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \ \cdots\ , \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$$

Entonces, un campo de coordenadas $v^1, v^2, \ldots, v^n$ será denotado

$$\vec{v} = v^1\, \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2\, \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3\, \frac{\partial}{\partial x^3} + \cdots + v^n\, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

De esta manera, la aplicación $g_*(\vec{v})$ queda definida, para $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{w} = g_*(\vec{v}) = \sum_{\mu=1}^{m} w^\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} v^\nu \frac{\partial g^\mu}{\partial x^\nu} \right\} \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

donde $\frac{\partial}{\partial y^\nu}$ es la base en $T_{g(\mathbf{x})}N$.

10 Cambio de Coordenadas

Uno de los aspectos más relevantes en la geometría de los sistemas de ecuaciones diferenciales (cuya representación son campos vectoriales) es el uso de cambio de coordenadas.

Los campos vectoriales definidos a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales son de la forma, para el caso de un sistema autónomo:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(x)$$

Este elemento yace en el espacio tangente $T_{\vec{x}}\mathbb{R}^n$ que por su propia estructura es su propio espacio tangente (el espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ es el mismo espacio).

Sin embargo, dada las simetrías posibles con las que nos encontramos en diversos problemas de mecánica (por citar alguno de los ejemplos) las coordenadas cartesianas no son las más adecuadas, a la hora de procurar el flujo de fase, o solución del problema.

Por tal motivo, es necesario aplicar la teoría presentada para que los cambios de coordenadas estén enmarcados en la teoría de la acción de difeomorfismos sobre campos.

Es más: podemos tener cambios de coordenadas que reparametricen el mismo espacio, por caso el uso de coordenadas polares

$$x = \rho\,\cos(\theta), \qquad y = \rho\,\sin(\theta),$$

o podemos encontrarnos que el problema posee una restricción que el radio permanece constante, por lo que el cambio de coordenadas será

$$x = a\,\cos(\theta), \qquad y = a\,\sin(\theta), \qquad a \text{ fijo}$$

Si bien ambos cambios se basan en pasar a polares, en el primer caso, ambos espacios poseen la misma dimensión (con espacios tangentes diferentes, para cada punto), pero en el segundo caso, la variedad del problema, dada la restricción $a = \mathit{constante}$, tiene un espacio tangente con dimensión 1 y no 2, como $\mathbb{R}^2$.

De la misma manera, podemos notar que

$$x = r\,\cos(\phi)\,\sin(\theta), \qquad y = r\,\sin(\phi)\,\sin(\theta), \qquad z = r\,\cos(\theta),$$

<u>no es la esfera</u>, sino conforme variamos los parámetros r, ϕ, θ tendremos todo $\mathbb{R}^3$. En cambio,

$$x = a\,\cos(\phi)\,\sin(\theta), \qquad y = a\,\sin(\phi)\,\sin(\theta), \qquad z = a\,\cos(\theta),$$

sí es la esfera de radio a. En este caso, el espacio tangente tendrá dimensión 2, y en el anterior, 3.

Como nuestro interés estará centrado en las ecuaciones diferenciales, vamos a estudiar los cambio de coordenadas sólo para el estudio de ecuaciones diferenciales. Los aspectos de la geometría diferencial, si bien son interesantes, lo dejaremos para otro material.

10.1 Cambio de Coordenadas en Ecuaciones Diferenciales

Sea $\vec{w} \in N$ la imagen del campo vectorial $\vec{v}$ en M bajo la acción del difeomorfismo g, $g : M \to N$. Esto es,

$$\vec{w} = g_*(\vec{v})$$

Bajo estas hipótesis, tenemos el siguiente resultado:

Teorema. *El sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in M$$

y el sistema

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{w}(\vec{y}), \qquad \vec{y} \in N$$

son equivalentes en el sentido de que si $\varphi(t)$ *es una solución del primero,* $g(\varphi(t))$ *es una solución del segundo, y viceversa.*

Esto significa que dado el cambio de coordenadas $\vec{y} = g(\vec{x})$, invirtiendo y obteniendo $\vec{x}$ como función de $\vec{y}$ transforma la primera ecuación en la segunda. Lo mismo ocurre, de la segunda ecuación, poniendo $\vec{y} = g(\vec{x})$ pasamos de la segunda a la primera.

La demostración es inmediata: Consideremos

$$\frac{d}{dt}(g \circ \varphi) = Dg\,\frac{d\varphi}{dt} = Dg\,\vec{v} = g_*(\vec{v}) = \vec{w}(\vec{y})$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}[g(\varphi(t))] = \vec{w}(g(\varphi(t))).$$

El cambio de coordenaxdas vendrá dado por la simetría del problema.

Ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

Si pasamos a coordenadas polares, $x = \rho\,\cos(\theta)$ y $y = \rho\,\sin(\theta)$. La forma más artesanal es calcular, a partir del cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho}\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\dot{\theta} = \underbrace{\rho\,\sin(\theta)}_{y} \\ \dot{y} &= \dot{\rho}\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\dot{\theta} = \underbrace{-\rho\,\cos(\theta)}_{-x} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema en $\dot{\rho}$ y en $\dot{\theta}$ obtenemos

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\theta} = -1$$

Es más interesante (y más sencillo tal vez) aplicar el difeomorfismo y las bases de los espacios tangentes: Veamos, El difeomorfismo g viene definido como $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ a partir de

$$g(x, y) = (r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right))$$

Apliquemos ahora el g_* al campo vectorial $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$.
Entonces, aplicando el difeomorfismo al campo, tenemos

$$g_*(\vec{v}(\vec{x})) = Dg \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = v_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

que produce el sistema de ecuaciones

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\theta} = -1$$

cuya solución, es,

$$\rho(t) = \rho_0, \quad \theta(t) = \theta_0 - t$$

retornando a las variables cartesianas, tenemos como solución

$$x(t) = \rho_0 \cos(\theta_0 - t), \quad y(t) = \rho_0 \sin(\theta_0 - t)$$

Otro Ejemplo. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x\,(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Si queremos expresar el sistema en coordenadas polares, aplicamos el mismo difeomorfismo que en el ejemplo anterior, así que la aplicación del g_* se efectúa con la misma matrix jacobiana, entonces,

$$g_*(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y + x\,(1 - x^2 - y^2) \\ -x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{bmatrix}$$

Haciendo el producto, resulta facilmente

$$g_*(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \rho(1 - \rho^2) \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema en polares resulta

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} &= -1 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son, a saber

$$\begin{aligned} \rho(t) &= c\frac{e^t}{\sqrt{1 + c^2 e^{2t}}} \\ \theta(t) &= \theta_0 - t \end{aligned}$$

Podemos notar que la curva $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 1$. Esta curva se la denomina *ciclo límite*. También este efecto se lo conoce como *atractor*.

11 Acción de Difeomorfismos sobre Campos de Dirección

La aplicación de cambios de coordenadas para campos vectoriales del tipo $\vec{(\vec{x})}$ puede ser extendida para los denominados campos de dirección.

Los campos de dirección son tratados *como si* fueran campos vectoriales, pero en espacios más generales. A ver, un problema plano puede considerarse como

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$$

Ahora bien, este campo vectorial nos provee en cada punto $\vec{x}$ un vector en $T_{\vec{x}M}$.

Si tuviéramos un problema no autónomo, por ejemplo,

$$\frac{dx}{dt} = v(x,t)$$

podríamos visualizar en el plano tx en cada punto una dirección tangente. Es decir, en cada punto (t_0, x_0) tendríamos un número denominado pendiente de la tangente $\frac{dx}{dt}(t_0, x_0)$. Lo que implica es que en cada punto tenemos definida una pendiente de una recta tangente.

Esto es lo que se conoce como *campo de dirección*.

Con esta definición, podemos extender el alcance de la aplicación de difeomorfismos a campos de direcciones. El análisis es completamente análogo, donde ahora en la variedad M o N podemos considerar que una de las coordenadas es el t.

Teorema. *Bajo la acción de un difeomorfismo $g : M \to N$ las curvas integrales del campo de dirección original en M se transforman en las curvas integrales del campo de dirección en N.*

Como vemos, es en esencia el mismo teorema de acción de difeomorfismos.
El teorema plantea que para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = v(x,t)$$

es necesario construir (o proponer, dada la simetría del problema) un difeomorfismo para que en las nuevas variables la ecuación sea integrable de manera elemental.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \frac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2}$$

Hallar un difeomorfismo tal que en las nuevas variables, la ecuación diferencial sea separable.
Solución. Como la ecuación diferencial es homogénea (repasar los métodos elementales de resolución). Podemos definir el cambio de variable $y = \frac{t}{x}$ Es decir, el difeomorfismo será

$$g(t,x) = (t, \frac{t}{x}) = (t, y)$$

Aplicando g_* al vector dirección, tenemos

$$g_*(1, \dot{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & -\frac{t}{x^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{x^2-t^2}{x^2+t^2} \end{bmatrix}$$

Escribiendo en las nuevas variables, tenemos

$$g_*(1, \dot{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{t}y & -\frac{1}{t}y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-y^2}{1+y^2} \end{bmatrix}$$

Con lo que obtenemos las ecuaciones para el campo de dirección en las nuevas variables (t, y)

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{y} = \frac{1}{t}\, y \left[1 - y\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$$

La ecuación $\dot{t} = 1$ es complementaria, la ecuación diferencial no trivial es la segunda, la cual queda a variables separables.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} + x = t$$

El cambio de variables dado a partir del difeomorfismo

$$g(t, x) = (t, (x - t - 1)e^t - 1) = (t, y)$$

Lleva la solución del problema original a la recta $y = constante$. Para comprobar esto, sólo es necesario reescribir el sistema de ecuaciones para ver cómo queda en las nuevas variables. Un problema más interesante es el de encontrar el difeomorfismo para el cual en las nuevas variables la solución, en las nuevas variables, son rectas horizontales. Este procedimiento se denomica *rectificación.*

Ejemplo de rectificación. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = 2x - 4$$

Notemos que la solución general se puede escribir (es una lineal)

$$x = 2 + a\, e^{2t}, \quad a = constante$$

Entonces, el cambio

$$(t, x) \quad \to \quad (t, \underbrace{(x-2)e^{-2t}}_{a=constante}) = (t, y)$$

lleva al plano ty en el que las soluciones son rectas horizontales.

12 Acción de Difeomorfismos sobre Flujos de Fase

Para completar esta exposición introductoria de temas, analicemos cómo operan los difeomorfismos sobre los flujos de fase, propagadores temporales de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Consideremos el grupo de difeomorfismos uno-paramétricos $\left\{g^t : M \to M\right\}$ y sea f un difeomorfismo $f : M \to N$.

La imagen del flujo g^t por la aplicación del difeomorfismo f es el flujo de fase $h^t : N \to N$ donde

$$h^t = f \circ g^t \circ f^{-1}.$$

Observación. Los flujos g^t y h^t son *equivalentes* ya que corresponden a la misma ecuación diferencial, escrita y resuelta en diferentes variables.

13 Bibliografía recomendada

[1] Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer. (1991)

[2] Arnol'd, Vladimir I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer. (1980)

[3] Doering, Claus I., Lopes, Arthur O. *Equações Diferenciais Ordinárias*, Ed. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA. (2005).

[4] Hurewicz, Witold. *Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ediciones RIALP, Madrid. (1958).