# Teoría de la Convergencia

Octavio Miloni

# 1 Introducción. Motivaciones

Nuestro objetivo central en este curso es el estudio de ecuaciones diferenciales, tanto problemas de valor inicial (Cauchy), como así también de contorno (Sturm-Liouville).

Este estudio de ecuaciones diferenciales se sostiene en la existencia de soluciones y dicha existencia se fundamenta en la convergencia uniforme de las series formales que se construyen a partir del problema a resolver.

En este sentido, la convergencia uniforme de las series formales nos permite asegurar que lo obtenido formalmente es una función: la función solución del problema.

Juntamente con la solución de ecuaciones diferenciales, el estudio de desarrollos de Fourier será parte del curso, por lo que como toda representación, deberemos asegurar las convergencia uniforme de los desarrollos, además de la convergencia puntual.

En este material revisaremos los conceptos de sucesiones, convergencia de sucesiones para luego dedicarnos a las series, tanto numéricas como de funciones.

Vamos a comenzar con la construcción de los números irracionales a partir de las denominadas *Cortaduras de Dedekind*.[1]

# 2 Continuidad en la Recta Real

En los cursos de Álgebra se hace un estudio exhaustivo de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos donde por lo general no se detiene en la construcción de los irracionales, salvo en la manifestación de este conjunto numérico a partir de la imposibilidad de representar de manera de fracción de enteros de la $\sqrt{2}$.

Sin la necesidad de comenzar todo el estudio de los conjuntos numéricos desde los enteros, nos detendremos en la construcción de los irracionales. Este detenimiento no tiene por objeto la completación del estudio desde el punto de vista algebraico, sino más bien apunta a la continuidad del conjunto de lo números reales (tal cual la motivación original de Dedekind [2]) de manera tal de proveernos de un método para el estudio de límites, convergencia, etc.

## 2.1 Los Números Racionales y la Recta

Como advertimos, no es necesario que repitamos lo visto en los cursos de Álgebra en lo que respecta a los números racionales. Para nosotros será suficiente una descripción cualitativa de las propiedades que nos permitirán definir los números irracionales.

Consideremos las siguientes propiedades de los números racionales que nos permitirán construir la idea de irracional.

Sean $a$, $b$ y $c$ números en $\mathbb{Q}$

I. Si $a < b$ y $b < c$, entonces, $a < c$.

[1] Julius Wilhelm Richard Dedekind (6 de octubre de 1831 - 12 de febrero de 1916). Al verse en el compromiso de dictar un curso de cálculo infinitesimal notó que la continuidad de la recta real estaba descripta muy intuitivamente y faltaba una formalización con relación a los números irracionales.

II. Si $a$ y $c$ son números distintos, entonces hay siempre infinitos números $b$ que están situados entre $a$ y $c$

III. Si $a$ es un número determinado, entonces todos los números en $\mathbb{Q}$ se subdividen en dos clases

- La clase $A_1$, de aquellos números $a_1$, tales que $a_1 < a$
- La clase $A_2$, de aquellos números $a_2$, tales que $a_2 > a$

El propio número $a$ puede ser ubicado a voluntad tanto en la primera clase (siendo el máximo) o a la segunda clase (como el mínimo).

Esta división hace que, dado un número determinado $a \in \mathbb{Q}$, el conjunto de los racionales se divide en dos clases $A_1$ y $A_2$ donde todo elemento de $A_1$ es menor que todo elemento de $A_2$.

**La recta**. Esta división en clases de los elementos de $\mathbb{Q}$ nos permite asociar (como ya se sabe) los elementos de $\mathbb{Q}$ con los puntos de una recta, donde las propiedades enunciadas pueden reformularse en términos geométricos, a saber,

Dados los puntos $p$, $q$ y $r$ pertenecientes a una recta podemos definir (equivalentemente)

I. Si $p$ está a la derecha de $q$ y $q$ a su vez está a la derecha de $r$, entonces, $p$ está también situado a la derecha de $r$

II. Si $p$ y $r$ son dos puntos distintos, entonces siempre hay infinitos puntos $q$ situados entre $p$ y $r$

III. Si $p$ es un determinado punto de la recta, entonces los puntos de ella se subdividen en dos clases $L$ y $R$

- La clase $L$: Es el conjunto de puntos situados a la izquierda de $p$
- La clase $R$: Es el conjunto de puntos situados a la derecha de $p$

Análogamente al conjunto numérico, el punto $p$ puede ser incorporado a alguna de las clases. En cualquier caso, esta división en clases permite establecer que todo punto de $L$ está a la izquierda de todo punto de $R$.

Esta asociación entre puntos de una recta y números racionales permite asociar unívocamente a cada punto de la recta -una vez que arbitrariamente se define un origen $\mathcal{O}$ en ella- con un número racional, a partir de asociar una determinada longitud y la asignación de un signo. Además las clases $A_1$ y $A_2$ en $\mathbb{Q}$ estarán asociadas a las clases $L$ y $R$ en la recta.

A partir de la definición de una longitud denominada *unidad* podemos asociar todo número en la recta siempre que sea *conmensurable* con esta unidad, es decir, que sea un múltiplo entero de una parte entera de esta unidad (dada $\ell$ la longitud unidad, cualquier racional $\frac{p}{q}$ será ubicado calculando $p \times \frac{\ell}{q}$). Esto significa que dado un número racional *siempre* hay un segmento conmensurable con la longitud unidad elegida, de manera tal de que *siempre se puede asociar a un número a un punto de la recta.* La recíproca es el problema.

Ya desde la época de Pitágoras se sabe que la recíproca (todo segmento tiene un número racional asociado) no se cumple. En particular, el cuadrado unidad tiene por diagonal el segmento que mide $\sqrt{2}$ el cual, como se sabe, no corresponde a ningún segmento conmensurable con la unidad de medición. Además, se puede demostrar que existen infinitos segmentos cuyas longitudes no se corresponden con números racionales.

La construcción de los números irracionales surgirá de la reflexión hecha por Dedekind (ver [2])

*"... Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, el corte de la recta en dos partes..."*

## 2.2 Construcción de los Números Irracionales. Cortaduras de Dedekind

Dado que un número racional define dos clases, la $A_1$ y la $A_2$, donde arbitrariamente asignamos al número pertenecer a alguna de ellas (como máximo de la $A_1$ o mínimo de la $A_2$) vamos a pensar ahora a partir de una partición en clases $A_1$ y $A_2$ y definir a partir de la partición el número que las define. Esta partición fue llamada por Dedekind como *cortadura* y se la denota $(A_1, A_2)$.

Existen infinitas cortaduras que no pueden ser determinadas por números racionales. Para ver esto, analicemos el ejemplo propuesto por Dedekind.

Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que no es el cuadrado de ningún número entero. Entonces, existirá $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que (la demostración se deja como ejercicio)

$$\lambda^2 < d < (\lambda + 1)^2$$

Definamos la cortadura de Dedekind $(A_1, A_2)$ de la siguiente manera: Sea $A_1$ los números cuyo cuadrado son menores que $d$ y $A_2$ los números cuyo cuadrado son mayores que $d$.

Esta cortadura no está determinada por ningún número racional.

En efecto, supongamos que existe un $d = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \in \mathbb{Q}$ (de fracción irreducible) tal que se cumple la desigualdad. Entonces, tenemos $p^2 = d\,q^2$. Además, dado el cumplimiento de la desigualdad,

$$\lambda^2 < d < (\lambda + 1)^2$$
$$\lambda^2\,q^2 < p^2 < q^2(\lambda + 1)^2$$
$$\lambda\,q < p < q\,(\lambda + 1)$$

restando a ambos miembros $\lambda\,q$ tenemos

$$0 < p - \lambda\,q < q$$

Definamos

$$\begin{aligned} p' &= d\,q - \lambda\,p \\ q' &= p - \lambda\,q \end{aligned}$$

de manera directa obtenemos

$$p'^2 - d\,q'^2 = (p^2 - d\,q^2)(\lambda^2 - d)$$

Ahora, como hemos supuesto que $d = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ entonces, tenemos

$$p'^2 - d\,q'^2 = 0 \qquad \to \qquad d = \left(\frac{p'}{q'}\right)^2$$

Pero esto contradice la hipótesis de ser irreducible, ya que $q' < q$.

Lo que acabamos de demostrar es que la cortadura $(A_1, A_2)$ no tiene un racional como elemento que la defina. Es decir, dado un número racional $x$, o bien se cumple $x^2 < d$ o $x^2 > d$, lo que implica que $A_1$ no tiene máximo y $A_2$ no tiene mínimo.

En efecto, sea

$$y = \frac{x(x^2 + 3d)}{3x^2 + d}$$

Entonces, calculando tenemos

$$y - x = \frac{2x(d - x^2)}{3x^2 + d}$$

Además, se obtiene directamente

$$y^2 - d = \frac{(x^2 - d)^3}{(3x^2 + d)^2}$$

- Si $x^2 < d$ llegamos a que
  - ▲ $x < y$
  - ▲ $y^2 < d$
- Si $x^2 > d$ llegamos a que
  - ▲ $y < x$
  - ▲ $d < y^2$

Lo que demuestra que en los racionales en $A_1$ no hay máximo y en $A_2$ no hay mínimo.

Esta propiedad, de que no todas las cortaduras están determinadas por racionales, pone de manifiesto la incompletitud de $\mathbb{Q}$ (o discontinuidad en la recta).

A partir de esta propiedad, cada vez que una cortadura $(A_1, A_2)$ no está determinada por un número racional se *crea* un nuevo número denominado *irracional*, $\alpha$, el cual está unívocamente determinado por la cortadura. Recíprocamente, una vez creado el conjunto de los irracionales, cada irracional $\alpha$ determina unívocamente una cortadura.

A cada cortadura determinada le corresponde un y sólo un número, racional o irracional, y diremos que dos números son distintos o desiguales si y sólo si corresponden a dos cortaduras diferentes.

Una vez definidos los números irracionales a partir de las cortaduras de Dedekind, se establece el conjunto de reglas que permiten calcular, ordenar, etc. Asimismo, se definen las operaciones que completan a las elementales, tales como raíces, logaritmos, exponenciales, etc.

Del estudio realizado por Dedekind, vamos a recortar lo relacionado a nuestro interés: procesos de límite y los fundamentos del análisis infinitesimal. En los estudios de análisis, las cortaduras en el contexto de los reales las denomina $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$

## 2.3 Análisis Infinitesimal y límites

Finalmente, del estudio de los Irracionales hecho por Dedekind, tomamos el análisis del proceso de límite, a partir de la completitud que otorga la definición de las cortaduras.

Decimos que una cantidad $x$ tiende hacia un valor límite $\alpha$ si la cantidad $|x - \alpha|$ se mantiene menor que cualquier número diferente de cero.

Las cortaduras de Dedekind nos permiten demostrar teoremas relacionados con límites. Veamos el siguiente teorema.

**Teorema.** *Toda sucesión monótonamente creciente que se mantiene acotada, tiende a un valor límite.*

**Demostración.** En virtud de que la sucesión está acotada por un determinado valor $x$, tendremos que $x_n < x$ para todo $n$. Este mismo número $x$ define una cortadura a partir de un número irracional $\alpha$.

Entonces, a partir de un número determinado $n_0$ existirá un número positivo $\varepsilon$ tal que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ está en la clase $\mathcal{U}_1$ y $\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ está en la clase $\mathcal{U}_2$, con lo que podemos deducir que para un $n > n_0$ tendremos que

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon$$

lo que es equivalente a decir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

De manera análoga se puede demostrar el recíproco: *Toda sucesión decreciente acotada inferiormente tiene un valor límite.*

Si bien estos últimos teoremas podrían ser parte de un capítulo relacionado a sucesiones, lo incorporamos para dar una idea de que las cortaduras de Dedekind no sólo *crean* los irracionales, sino que también poseen un valor práctico que nos permite demostrar teoremas relacionados a procesos de límite.

## 2.4 Intervalos Encajados

Complementariamente a las cortaduras de Dedekind, para el desarrollo del análisis de la continuidad de la recta real surge la definición de intervalos encajados (ver para detalles [1]), descripto de manera excelente en el artículo de Pétard[2] (ver referencia [4]).
La construcción de intervalos encajados se sostiene en la premisa de que dados dos racionales, existen infinitos número entre ellos. Si queremos describir un número real $x$ a partir de racionales se puede describir a partir de construir una sucesión de intervalos comenzando por $I_1$, definido a partir de la relación

$$a_1 \leq x \leq b_1 \qquad \text{con } a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$$

[2]En 1938, Pétard escribió un artículo recomedable en el cual, de manera intuitiva, didáctica y divertida -sobre una estrategia de encerrar un León en el Desierto del Sahara- establece la fundamentación del método de bisección como para ejemplificar los intervalos encajados, artículo que sirve para fundamentar la conjetura de Weierstrass

Se sigue con la construcción de otro intervalo $I_2$ definido por otros dos racionales $a_2, b_2$ tales que se cumple

$$a_1 \leq a_2 \leq x \leq b_2 \leq b_1$$

y así sucesivamente definiendo $n$ intervalos encajados

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq x \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Con esta definición, se concluye el siguiente postulado

**Postulado de los encajes de intervalos.** *Si $I_1, I_2, I_3, \ldots$ forman una sucesión encaje de intervalos con puntos extremos racionales, existe un punto $x$ contenido en todo $I_k$.*

**Observación.** Para la definición de encaje de intervalos el hecho de que los intervalos deben ser cerrados. Si consideramos el caso $0 < x < \frac{1}{n}$ (ejemplo obtenido de la referencia [1]) no existe un $x$ contenido en todo $I_n$.

# 3 Sucesiones en la Recta Real

Vamos ahora a abordar el estudio de las denominadas *sucesiones* o *secuencias* en el cuerpo de los números reales. Este estudio, aunque particular, nos proveerá del método general de análisis a la hora de trabajar en otros conjuntos, ya sean numéricos -como en el caso de los números complejos- o en espacios más generales, a partir de introducir los conceptos topológicos tales como *vecindad o entorno*, *distancias*, etc.

En el caso de números reales, los aspectos topológicos (para detalles, ver Rudin [5]) vienen dados a partir de la distancia en $\mathbb{R}$ provista por el valor absoluto $|x| = \sqrt{x^2}$, de manera tal que la distancia entre el número (o punto en la recta) $x$ y el número $a$ (o el punto correspondiente en la recta) vendrá a partir de calcular

$$d(x, a) = |x - a|$$

Para espacios más generales, la distancia vendrá definida a partir de la norma.

Una vez definida la norma en un determinado espacio, los resultados obtenidos en el conjunto de los números reales son extendibles sin mayores dificultades.

## 3.1 Desigualdades útiles

Si se tuviera que enunciar la diferencia entre el Álgebra y el Análisis Matemático se podría decir -de manera muy simpificada e inocente- que en el Álgebra el símbolo fundamental es el " $=$ " y en el Análisis Matemático es el " $<$ ". Nótese que se habló de Análisis Matemático y no de Cálculo Infinitesimal, en el cual se establecen relaciones (con igualdades, principalmente) que involucran funciones, sus derivadas, integrales, etc. Claro que se trata de una exageración, y por lo tanto no puede ser considerada como *la diferencia entre el Álgebra y el Análisis*.

En el propio proceso de análisis, como en el teorema sobre convergencia del capítulo anterior, el proceso de límite viene asociado a una desigualdad

$$|x - \alpha| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n > n_0$$

Esta desigualdad es equivalente a

$$\lim_{\ell \to \infty} x_\ell = \alpha$$

Para estudiar entonces procesos de límites, será necesario dominar *el arte de acotar*.

Si bien las acotaciones son algo parecido a un arte, donde la creatividad juega un rol importante, vamos a repasar algunas propiedades de valor absoluto que ayudan a efectuar acotaciones.

- *Desigualdad Triangular.* Dados los números $a$ y $b$ reales, se cumple

  $$|a+b| \leq |a| + |b|$$

  La demostración es sencilla: Si $a+b$ es positivo, tendremos que $|a+b| = a+b$. Por otro lado, tenemos que siempre se cumple $a \leq |a|$ y lo mismo para $b$. Entonces, sumando a ambos miembros, tenemos $|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$. Si $a+b < 0$ tenemos que $|a+b| = -(a+b)$ además, $-a \leq |a|$ y lo propio para $b$. Sumando a ambos miembros obtenemos $|a+b| = -(a+b) = -a-b \leq |a| + |b|$

- *Corolario de la Desigualdad Triangular.*

  $$|a| - |b| \leq |a+b| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{|a+b|} \leq \frac{1}{|a|-|b|}, \quad \text{siempre que } |a| < |b|$$

  Para demostrar esto, podemos partir de

  $$|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b| \quad \rightarrow \quad |a| - |b| \leq |a+b|$$

- Si $h$ es un número positivo y $n$ un entero positivo, se tiene

  $$(1+h)^n \geq 1 + n\,h$$

  La demostración es inmediata a partir del *Binomio de Newton*

- $$\sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}$$

  Se demuestra directamente a partir de que $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

## 3.2 Sucesiones. Límite de una Sucesión. Convergencia

Consideremos una *sucesión* o *secuencia* de números reales

$$\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Definiciones

- *Rango.* Es el conjunto de valores que pueden tomar los elementos de la sucesión.
- *Sucesión acotada.* Una sucesión es *acotada* si los elementos de la misma están acotados.

Ejemplos

- La sucesión $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\}$, con término general $x_\ell = \frac{1}{\ell}$ tiene
  - *Rango infinito.* En efecto, la sucesión recorre infinitos valores
  - *Es acotada.* En efecto, es decreciente y el primer elemento es 1, que será la cota de la sucesión.
- La sucesión $\{1, 4, 9 \ldots\}$, con término general $x_\ell = \ell^2$ tiene
  - *Rango infinito.* En efecto, la sucesión recorre infinitos valores
  - *Es no acotada.* En efecto, los elementos de la sucesión crecen más allá de toda cota
- Ejemplo en $\mathbb{C}$. La sucesión con término general $x_\ell = i^\ell$ tiene
  - *Rango finito.* En efecto, la sucesión recorre 4 valores posibles
  - *Es acotada.* En efecto, todos los elementos de la sucesión tienen valor absoluto unidad.

**Convergencia de una sucesión.** *Una sucesión $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ se dice que es convergente a un valor $x$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad n > N$$

*también lo denotamos como*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Por lo general, se utiliza el $\lim_{n\to\infty} x_n$ para *calcular*, si existiera, el límite de la sucesión y luego con la definición $|x_n - x| < \varepsilon$, con $n > N$ se lo demuestra.

La definición con valor absoluto no nos provee del valor límite, para conocer hacia donde tienden los elementos de la sucesión debemos calcularlo.

En lo referente a sucesiones, el contexto determinará la necesidad del uso del límite o del valor absoluto.
El siguiente teorema simplifica el cálculo de límites a la hora de considerar sucesiones que pueden interpretarse a partir de operaciones entre elementos de sucesiones conocidas.

**Teorema.** *Sean $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ y $\{y_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes, esto es,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*, entonces se cumple*

**(a)** $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$

**(b)** $\lim_{n\to\infty} c\, x_n = c\, x$

**(c)** $\lim_{n\to\infty} c + x_n = c + x$

**(d)** $\lim_{n\to\infty} x_n\, y_n = x\, y$

**(e)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$ *siempre que* $x_n \neq 0$, $\forall n$, $x \neq 0$

**Demostraciones**

**(a)** Consideremos $|x_n + y_n - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \le |x_n - x| + |y_n - y|$

Dado que ambas sucesiones convergen, tendremos que $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n > N_1$ y $|y_n - y| < \varepsilon$ siempre que $n > N_2$. Esto nos permite seleccionar un $N > max\{N_1, N_2\}$ de manera tal que para $n > N$ tendremos $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, volviendo al cálculo original,

$$|x_n + y_n - (x + y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{para} \quad n > N$$

**(b)** Esta demostración es elemental, pero hagámosla de todas maneras, como para acostumbrarnos al uso de la definición.

Consideremos $|c\, x_n - c\, x| = |c||x_n - x|$

Como la sucesión es convergente, tendremos $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Podemos elegir además que para $n > N$ tal que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Entonces, para $n > N$ tenemos

$$|c\, x_n - c\, x| = |c||x_n - x| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

**(c)** Tomemos

$$|c + x_n - (c + x)| = |x - x_n| < \varepsilon, \quad \text{siempre que} \quad n > N$$

**(d)** Para demostrar esta propiedad, hagamos uso de la identidad

$$x_n\, y_n - x\, y = (x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x)$$

Debido a la convergencia de ambas sucesiones, podemos hacer, para un $N > \max\{N_1, N_2\}$, $|x_n - x| < \sqrt{\varepsilon}$ y $|y_n - y| < \sqrt{\varepsilon}$, con lo que el primer término queda $|(x_n - x)(y_n - y)| < \varepsilon$. Con esto y la validez de las propiedades **(a)**, y **(b)** podemos demostrar la propiedad.

**(e)** Consideremos $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{|x_n\, x|}$. Si elegimos que a partir de un $n$ determinado se cumpla $|x_n| > \frac{|x|}{2}$ y $|x_n - x| < \frac{1}{2}|x|^2\varepsilon$ podemos demostrar la propiedad.

## 3.3 Punto de Acumulación

**Definición.** Dada una sucesión $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$, decimos que $x$ es un *punto de acumulación*[3] si todo intervalo abierto que contenga a $x$ contiene también infinitos elementos de la sucesión. En otras palabras, si $x$ es un punto de acumulación si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ existen infinitos } n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

**Observación.** *Relaciones, Confusiones.* La definiciones de límite de una sucesión y de puntos de acumulación de una sucesión son iguales en términos de las relaciones que se utilizan. En ambas definiciones, la desigualdad fundamental que se usa es

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

Repasemos las definiciones para identificar las diferencias sustanciales entre ambas definiciones.

[3]Los puntos de acomulación son también denominados *puntos límite*. Vamos a evitar la utilización de esta denominación porque puede traer confusiones con el límite de una sucesión.

(I) *Límite de una Sucesión.* En esta definición entra la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$, pero en el siguiente contexto:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad |x_n - x| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n > N$$

Esta definición establece que, fijado un $\varepsilon$ -tan pequeño como se desee-, siempre se puede encontrar un $N$ tal que para $n > N$, $x_n$ (y todos los que le siguen en la sucesión) esté tan cerca de $x$ como se desee.

(II) *Punto de Acumulación.* En esta definición la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ interviene en el siguiente contexto:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \text{existen infinitos}\, x_n, \text{que cumplen}\ |x_n - x| < \varepsilon$$

Esta definición no obliga a que toda la infinidad de elementos de la sucesión estén en el entorno de $x$, más aún, la definición no establece la *unicidad* de los puntos de acumulación.

A modo de consolidar la diferencia entre las definiciones, consideremos la sucesión

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\} \quad \rightarrow \quad x_j = (-1)^j,\ \ j = 1, 2, 3, \dots$$

Claramente, esta sucesión no converge a ningún límite, pero admite dos puntos de acumulación, el 1 y el (-1), ya que

$$|x_\ell - 1| = 0 < \varepsilon \qquad \forall\, \ell\, \text{par, que son infinitos}$$

y

$$|x_\ell + 1| = 0 < \varepsilon \qquad \forall\, \ell\, \text{impar, que son infinitos}$$

## 3.4 Teorema de Bolzano-Weierstrass (I)

El *Teorema de Bolzano - Weierstrass* posee múltiples denominaciones e incluso formulaciones. Este resultado, enunciado inicialmente por Weierstrass, como *principio de Weierstrass*, fue demostrado por Bolzano (ver, para detalles, el libro de Whittaker y Watson [7]).

**Principio de Weierstrass (I).** *Toda sucesión acotada tiene al menos un punto de acumulación.*

Para probar este enunciado, partimos del hecho de una sucesión $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ acotada. Esto implica que existirá un intervalo $[a_1, b_1]$ que contenga a todos los elementos de la sucesión. Ahora, podemos definir una sucesión de intervalos encajados según el siguiente criterio:

- A partir de $[a_1, b_1]$ definimos un encaje $[a_2, b_2]$ partiendo a la mitad el primero, de manera tal de contener infinitos elementos de la sucesión.
- Nuevamente, partiendo a la mitad $[a_2, b_2]$ definimos otro intervalo encajado $[a_3, b_3]$ de manera tal de que en este intervalo hayan infinitos elementos de la sucesión
- Y así sucesivamente

Lo que vamos a tener es una sucesión de intervalos encajados que siempre contenga una infinidad de elementos de la sucesión. Ahora, por construcción, una sucesión de intervalos encajados definen un número real, $x$.

Entonces, tenemos: Una sucesión de intervalos encajados, cuya longitud será

$$|b_\ell - a_\ell| = \frac{|b_1 - a_1|}{2^{\ell-1}}$$

Ahora, por construcción tenemos que existen infinitos elementos de la sucesión (así fue elegida la mitad de cada encaje) y además una sucesión de intervalos encajados define un número real, $x$, entonces tenemos que *existen infinitos elementos de la sucesión $x_n$ para los cuales se cumple*

$$|x_n - x| < \frac{|b_1 - a_1|}{2^{\ell-1}}$$

Si llamamos $\varepsilon = \frac{|b_1-a_1|}{2^{\ell-1}}$ tenemos que existen infinitos elementos de la sucesión que satisfacen

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

Lo que implica que $x$ es un punto de acumulación. Es decir, si la sucesión está acotada, tiene al menos un punto de acumulación.

Esta demostración a partir de intervalos encajados utiliza el método de bisección utilizado para enjaular al león del desierto del Sahara, en el artículo de Pétard [4].

Whittaker y Watson en su *A Course of Modern Analysis* [7] plantean una demostración de este resultado, pero a partir de las cortaduras de Dedekind, enunciado como *Teorema de Bolzano.*

## 3.5 Subsucesiones

**Definición.** Dada una sucesión $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$, consideremos un conjunto de índices que es subconjunto de los naturales (por donde varía los índices de la sucesión) $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots\}$. La sucesión

$$\{x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, x_{\ell_3}, \dots\}$$

se llama *subsucesión* de $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$.

Si $\left\{x_{\ell_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge, el límite se lo denomina *límite subsecuencial* de $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$

Es evidente -y su demostración trivial- que si una sucesión converge a $x$, toda subsucesión converge a $x$.

## 3.6 El Teorema de Bolzano-Weierstrass (II)

Como vimos, dada una sucesión, los puntos de acumulación y los límites de la sucesión son aspectos diferentes, aunque sus definiciones parezcan similares, debido a las expresiones utilizadas. Sin embargo, los puntos de acumulación pueden ser definidos como límites de subsucesiones, escogiendo adecuadamente los elementos de la sucesión original.

Para el ejemplo de sucesión $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ si escogemos los índices pares, tenemos que el punto de acumulación $x = 1$ es además el límite de la sucesión constante $\{1, 1, 1, \dots\}$.

La demostración se basa en partir de un intervalo y escoger los elementos de los intervalos encajados seleccionando aquellos elementos que se acerquen al punto de acumulación, construyendo una sucesión convergente a dicho punto.

**Principio de Weierstrass (II).** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

**Definición. Compacidad.** *Un conjunto se dice compacto si toda sucesión de sus elementos contiene una subsucesión convergente a un elemento del conjunto. En otras palabras, en $\mathbb{R}$ todo conjunto cerrado y acotado es compacto.*

## 3.7 Sucesiones de Cauchy

Como ya hemos visto como ejemplo de las cortaduras de Dedekind, la condición de que toda sucesión monótona y acotada es suficiente para asegurar la convergencia. Este resultado no presupone conocer el límite de la sucesión, sino que su objetivo es la garantía de existe este límite. Además, la monotonía y acotación son propiedades de relativa simpleza de comprobación.

Si bien el resultado es muy importante, ya que provee una condición suficiente, la monotonía no es necesaria para la convergencia. Por ejemplo, la sucesión dada a partir del término general

$$x_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell}$$

converge -al cero-, pero no es monótonamente decreciente.

El *criterio de convergencia Cauchy*, también denominado *prueba intrínseca* proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia del límite de una sucesión.

**Definición.** Se dice que una sucesión $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon$ existe un número $N$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \qquad \text{siempre que} \qquad n, m > N$$

**Demostración.** Vamos a dividir la demostración en la condición necesaria y suficiente.

Demostremos primero que *toda sucesión convergente es de Cauchy.* En efecto, sea $\{x_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ una sucesión convergente con límite $x$. Por definición tendremos que a partir de un cierto $N$ se cumplirá

$$|x_n - x| < \varepsilon, \qquad |x_m - x| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } n, m > N$$

Más aún, podemos escribir

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{siempre que } n, m > N$$

Entonces, calculemos

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_n + x - x| = |x_m - x - (x_n - x)| \leq |x_m - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

siempre que $m, n > N$. Esto concluye la prueba de la condición necesaria.

Para probar que una sucesión de Cauchy es convergente (condición suficiente) partimos del hecho de que para un par de números suficientemente grandes ($m, n > N$, para un $N$ dado)

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Esto significa que para el $N$ en cuestión podemos asumir que existen infinitos $x_n$ tales que

$$|x_m - x_N| < 1$$

Ahora, $N$ es un número finito, lo que implica que podríamos ampliar el intervalo de manera tal de que cada vez queden menos elementos fuera, hasta hallar un intervalo suficientemente grande (pero finito) que contenga a todos los elementos. Esto implica que la sucesión está acotada. Ahora, si la sucesión está acotada, admite un punto de acumulación, como ya se ha probado. Sea $x$ el punto de acumulación. Como $x$ es un punto de acumulación, tendremos que existen infinitos $n$ y $m$ tal que se cumple simultáneamente

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad y \quad |x_m - x| < \varepsilon$$

para $n, m > N$, lo que demuestra que $x$ es el límite de la sucesión.

# 4 Ejemplos y Tipos de Sucesiones. Representaciones

En este capítulo vamos a estudiar sucesiones a partir de modelos, tanto de manera explícita, para las cuales tenemos una expresión del término $\ell$-ésimo, como así también las que se generan por recurrencia, es decir, aquellas sucesiones cuyos términos son construídos a partir de sus antecesores.

Típicamente, las sucesiones vienen dadas

(a) A partir de una expresión del término general

$$x_\ell = f(\ell)$$

(b) A partir de una relación de recurrencia

$$x_\ell = f(x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1})$$

(c) A partir de una combinación mixta

$$x_\ell = f(\ell; x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1})$$

## 4.1 Identificación de Patrones. Término General de una Sucesión

El primer tipo de sucesiones indicadas son aquellas en las que por lo general se introduce el tema *sucesiones* para ejemplificar. Dicha introducción permite familiarizarnos con la idea de secuencia de números y debido a su expresión, el cálculo del límite de la sucesión puede hacerse directamente tomando el límite hacia el infinito de la función que define al término general.

Así, por ejemplo, dada la sucesión

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \cdots\right\}$$

Podemos darnos cuenta que

$$x_\ell = \frac{1}{2\ell+1} = f(\ell), \qquad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

es la expresión del término general. Notemos además que es monótonamente decreciente y que

$$\lim_{\ell\to\infty} x_\ell = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{2\ell+1} = 0$$

con lo que obtuvimos que la serie converge a cero.

**El número $e$, de Euler**. Un ejemplo interesante para este tipo de sucesiones es la definida a través del término general

$$x_\ell = \left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^\ell \qquad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

En este caso, determinar el límite de esta sucesión no es tan sencillo, ya que una forma *brutal* de tomar el límite daría " $1^\infty$ ", término para el cual no tenemos ningún tipo de respuesta, con lo cual el tratamiento de esta sucesión debe tener mayores niveles de análisis.

Notemos que el término general se puede escribir, usando el binomio de Newton,

$$x_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} 1^{\ell-k} \left[\frac{1}{\ell}\right]^k = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{1}{\ell^k}$$

Desarrolemos la sumatoria de manera tal de poder ver mejor:

$$\begin{aligned} x_\ell \quad &= \quad \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{1}{\ell^k} = 2 + \frac{1}{2!}\left[1-\frac{1}{\ell}\right] + \frac{1}{3!}\left[1-\frac{1}{\ell}\right]\left[1-\frac{2}{\ell}\right] + \frac{1}{4!}\left[1-\frac{1}{\ell}\right]\left[1-\frac{2}{\ell}\right]\left[1-\frac{3}{\ell}\right] + \\ & \quad + \frac{1}{5!}\left[1-\frac{1}{\ell}\right]\left[1-\frac{2}{\ell}\right]\left[1-\frac{3}{\ell}\right]\left[1-\frac{4}{\ell}\right] + \cdots + \frac{1}{\ell!}\left[1-\frac{1}{\ell}\right]\left[1-\frac{2}{\ell}\right]\cdots\left[1-\frac{\ell-1}{\ell}\right] \end{aligned}$$

Podemos notar que $x_\ell > 2$, ya que es el primer término y todos los demás son números positivos. Además podemos acotar de la siguiente manera, definiendo

$$y_\ell = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{\ell!}$$

y una cota superior de esta sumatoria

$$z_\ell = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell-1}} = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell-1}}}_{\text{suma geométrica}}$$

Entonces, sumando la geométrica, podemos escribir esta sucesión

$$z_\ell = 1 + 2\frac{(2^\ell - 1)}{2^\ell} = 3 - \frac{1}{2^{\ell-1}}$$

Entonces, tenemos que

$$2 < x_\ell < y_\ell < z_\ell = 3 - \frac{1}{2^{\ell-1}}$$

O simplemente,

$$2 < x_\ell < 3$$

Además, se puede comprobar directamente que la sucesión es monótonamente creciente. Y por lo que vimos, una sucesión monótonamente creciente y acotada tiene un límite. Ese límite es el número $e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696 7....$

La búsqueda del término general de una sucesión es el desafío de la identificación de patrones en determinada secuencia. Es por lo general con lo que nos introducimos al estudio de sucesiones.

## 4.2 Sucesiones Recurrentes

Las sucesiones recurrentes son aquellas que el término general no viene dado explícitamente, sino que para calcular el $\ell$-ésimo término de la sucesión es necesario conocer todos los anteriores. Como ejemplo, consideremos la sucesión

$$\{1, 5, 13, 29, 61, 125, \dots\}$$

Para este caso, no se ve sencillamente una expresión que defina un determinado elemento de la sucesión. Ahora, podemos ver que

$$\begin{aligned} 5 &= 2\cdot 1 + 3 \\ 13 &= 2\cdot 5 + 3 \\ 29 &= 2\cdot 13 + 3 \\ 61 &= 2\cdot 29 + 3 \\ 125 &= 2\cdot 61 + 3 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Con lo que el término $\ell$-ésimo se obtiene a partir del anterior a través de

$$x_\ell = 2\cdot x_{\ell-1} + 3$$

Notemos que esta relación nos arroja los términos de la sucesión dada siempre que para $\ell = 1$ tengamos $x_1 = 1$, sino no podríamos calcular término alguno.

En general, toda sucesión recurrente necesita una cantidad de elementos iniciales conocidos que son los necesarios para poder calcular los siguientes.

### 4.2.1 Tipos de Sucesiones Recurrentes: Homogeneidad, Orden, etc.

Como vimos, en general una sucesión refinida por recurrencia posee la estructura

$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_{\ell-1} \\ x_\ell = f(x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}) \end{cases}$$

Donde en general $f$ puede ser cualquier función.

Vamos a detenernos en algunos tipos particulares de sucesiones de recurrencia

(I) *Lineales.* Son aquellas en las que la relación de recurrencia es lineal en todos los elementos anteriores de la sucesión involucrados.

(II) *Homogéneas.* Son aquellas en las cuales todos los términos dependen de un elemento de la sucesión, es decir que no tiene términos constantes. En la sucesión que se ha dado de ejemplo, $x_\ell = 2\,x_{\ell-1} + 3$ es lineal, pero no homogénea, debido al término independiente, el 3.

Entonces, una recurrencia lineal y homogénea puede escribirse de la forma:

$$x_\ell = a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_{\ell-1}\,x_{\ell-1}$$

donde no todos los coeficientes $a_j$ deben ser necesariamente distintos de cero. Para completar la sucesión es necesario conocer los primeros $\ell - 1$ términos.

Para sucesiones recurrentes lineales y homogéneas es posible obtener la expresión del término general, asumiendo la dependencia

$$x_\ell = r^\ell, \qquad \text{y determinar el } r$$

En efecto, dada la recurrencia

$$x_\ell = a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_{\ell-1}\,x_{\ell-1}$$

al reemplazar la propuesta de término explícito obtenemos

$$r^\ell = a_1\,r + a_2\,r^2 + \cdots + a_{\ell-1}\,r^{\ell-1}$$

Con lo que el valor de $r$ se obtiene a partir de resover la ecuación

$$r^\ell - a_{\ell-1}\,r^{\ell-1} - a_{\ell-2}\,r^{\ell-2} - \cdots - a_2\,r^2 - a_1\,r = 0$$

Debido a la linealidad, todas las soluciones de esta ecuación formará parte de la solución general para el término general a partir de una combinación lineal de las soluciones, cuyos coeficientes serán ajustados luego a partir de los valores datos (notar la analogía con las ecuaciones diferenciales).

Esta ecuación es de grado $\ell$ con el $r = 0$ como solución y este valor no nos interesa, entonces, al dividir toda la ecuación por $r$ tenemos una ecuación de grado $\ell - 1$, con, en principio, $\ell - 1$ posibles valores de $r$. Casos de raíces múltiples deberán ser tratados particularmente.

### 4.2.2 Los Conejos de Leonardo de Pisa (Fibonacci)

De entre las sucesiones recurrentes lineales y homogéneas la *sucesión de Fibonacci* [4] es una de las más famosas. Esta sucesión surge de un problema-modelo de reproducción de conejos.

El problema tiene como hipótesis

i) Cada pareja de conejos al cruzarse tiene una pareja de conejos

ii) Para que una pareja de conejos pueda cruzarse debe transcurrir un periodo hasta alcanzar la madurez

iii) El periodo de gestación coincide con el periodo para alcanzar la madurez.

iv) Los conejos viven eternamente y no paran de tener conejitos (según postulado [i])

A fin de poder contar la cantidad de parejas que hay cada periodo de madurez (que es coincidente con el gestación), pongamos con triángulo rojo ($\color{red}\blacktriangle$) una pareja recien nacida y con azul una pareja adulta (capaz de cruzarse) ($\color{blue}\blacktriangle$). La regla de reproducción establece que luego de un periodo de gestación

$$\color{blue}\blacktriangle \quad \color{black}\rightarrow_{\text{luego de un } T} \rightarrow \quad \color{blue}\blacktriangle \color{black} + \color{red}\blacktriangle$$

$$\color{red}\blacktriangle \quad \color{black}\rightarrow_{\text{luego de un } T} \rightarrow \quad \color{blue}\blacktriangle$$

Con estas reglas, contemos la cantidad de parejas de conejos para diferentes tiempos (en periodos de gestación-madurez)

- $t = 0$: $\color{red}\blacktriangle$
- $t = T$: $\color{blue}\blacktriangle$
- $t = 2T$: $\color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle$
- $t = 3T$: $\color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle$
- $t = 4T$: $\color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle$
- $t = 5T$: $\color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle$
- $t = 6T$: $\color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{blue}\blacktriangle \ \color{red}\blacktriangle$
- Y así sucesivamente

De esta manera se puede ver que la cantidad de parejas a cada periodo de gestación/madurez viene dada por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_\ell = a_{\ell-1} + a_{\ell-2} \end{cases}$$

[4] Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1250), hijo de Guglielmo -quien tenía como apodo *Bonacci*- fue apodado de Fibonacci (por filius Bonacci, hijo de Bonacci).

Esta es la denominada *sucesión de Fibonacci*. Cada término es la suma de los dos anteriores inmediatos.

Podemos notar que esta sucesión recurrente es lineal y homogénea. Dada que posee esta característica, busquemos una expresión del término general, a partir de proponer $x_\ell = r^\ell$

Al proponer esa dependencia del término general con el índice, obtenemos que al sustituir en la relación de recurrencia

$$r^{\ell+2} = r^\ell + r^{\ell+1}$$

Dividiendo a ambos miembros por $r^\ell$ obtenemos la ecuación cuadrática

$$r^2 - r - 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

En particular, la primera raíz es la conocida *razón áurea*.

En general, los términos de la sucesión de Fibonacci vendrán dados como una combinación lineal de estos $r_1$ y $r_2$, donde además para que $r_0 = 1$ y $r_1 = 1$ se debe cumplir

$$a_\ell = \frac{1}{\sqrt{5}}\, r_1^\ell - \frac{1}{\sqrt{5}}\, r_2^\ell$$

**La razón áurea.** La razón áurea se remonta a los antiguos griegos, quienes pensaron que no todo rectángulo es ”armonioso” sino que para que lo sea, sus dimensiones deben estar relacionadas de alguna manera. En particular, para que un rectángulo sea áureo, si llamamos $b$ a la base y $h$ a la altura, sus dimensiones deben satisfacer (ver [8])

$$\frac{b}{h} = \frac{b+h}{b}, \qquad \text{llamando } \phi = \frac{b}{h} \qquad \rightarrow \qquad \phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

que puede escribirse como

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

cuya solución física (para que sea una longitud es) $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Si consideramos la sucesión

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89} \cdots\right\}$$

Esta sucesión tiene por límite a $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

La razón áurea también puede obtenerse como una *fracción contínua*

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

En la próxima sección llegaremos a esta expresión para $\phi$ mediante el método denominado de *aproximaciones sucesivas*.

### 4.2.3 Resolución de Ecuaciones No Lineales: Aproximaciones Sucesivas y Newton-Raphson

Vamos ahora a generar sucesiones recurrentes, pero con un fin: resolver ecuaciones no lineales. Para este propósito, vamos a considerar dos tipos de resolución: Método de Aproximaciones Sucesivas y el Método de Newton-Raphson. Existen más métodos que pueden verse en los libros recomendados [9] y [10].

El problema a resolver será el de encontrar la solución de la ecuación

$$f(x) = 0 \qquad x[a, b]$$

sólo que ahora haremos un análisis geométrico de la situación

**Esquemas Iterativos. Método de Aproximaciones Sucesivas.** Un esquema iterativo es un procedimiento secuencial que procura aproximar una determinada cantidad a partir de una repetición de operaciones con la cantidad obtenida en el paso anterior. Este método también es denominado de *aproximaciones sucesivas*.

**Aproximación de raíces**. Vamos a construir una sucesión para resolver la ecuación

$$3x - \cos(x) = 0$$

Esta ecuación admite una solución real, que aproximada a 7 decimales, es $x \approx 0.3167513$

El problema es cómo podría idear un procedimiento que vaya aproximando la solución de la ecuación.

Notemos que podríamos "despejar" la incógnita no como para resolver la ecuación, sino de manera de tipo funcional, por ejemplo,

$$x = \frac{\cos(x)}{3}$$

Con esta relación, podemos general una iteración del tipo:

$$x_{\ell+1} = \frac{\cos(x_\ell)}{3}$$

y de esta manera, si fijamos un valor inicial, $x_0$ podemos ver que ocurre con la secuencia

$$\left\{ x_0, \frac{\cos(x_0)}{3}, \frac{\cos(x_1)}{3}, \frac{\cos(x_2)}{3}, \frac{\cos(x_3)}{3}, \dots \right\}$$

Si Fijamos, como ejemplo, $x_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\cos(0)}{3} = 0.3333333 \\ x_2 &= \frac{\cos(0.3333333)}{3} = 0.3149857 \\ x_3 &= \frac{\cos(0.3149857)}{3} = 0.31693360 \\ x_4 &= \frac{\cos(0.31693360)}{3} = 0.31673184 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Podemos notar, que el cuarto elemento de la iteración tiene 4 decimales correctos.

El problema general será establecer las condiciones para que la sucesión tenga como límite la solución de la ecuación.

Más allá de las condiciones de convergencia, lo que debemos garantizar es que la iteración pueda realizarse, es decir que no se corte por no poder efectuar las iteraciones. Por ejemplo, si quisiéramos resolver la ecuación

$$x^2 + e^x - 2 = 0$$

podemos notar que al procurar la solución positiva a través de la iteración

$$x_{\ell+1} = \sqrt{2 - e^{x_\ell}}$$

comenzar por $x_0 = 0$ tendremos que $x_1 = 1$ y $x_2$ ya no se puede obtener en los reales. Por eso, las condiciones para que generar las iteraciones son muy importantes.

**Convergencia de la Sucesión.** En general, un esquema iterativo es una sucesión recurrente de la forma

$$x_{\ell+1} = \varphi(x_\ell)$$

donde la función $\varphi(x_k)$ es llamada *función de iteración.* Lo que es claro, es que la solución del problema es -en este caso- el valor de $x$ tal que

$$x_{solucion} = \varphi(x_{solucion})$$

esto es, la solución es un punto fijo de la iteración. Es necesario que la iteración

I. Se pueda efectuar indefinidamente

II. Tenga límite

La primera de las condiciones impone la necesidad de una adecuada elección tanto de la función de iteración, como así también la aproximación inicial, $x_0$.

La segunda de las condiciones, se obtiene a partir de un análisis:

Sea la iteración $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ la cual se crea para resolver una ecuación no lineal, cuya solucíon sea $x_{solucion}$ Entonces, a podemos escribir, restando a ambos miembros:

$$x_{\ell+1} - x_{solucion} = \varphi(x_\ell) - x_{solucion}$$

Llamando $\varepsilon_\ell$ a la diferencia entre el valor aproximado en el paso $\ell-$ésimo con la solución, tenemos $\varepsilon_{\ell+1} = \varphi(x_\ell) - x_{solucion}$. Si la función de iteración es derivable con continuidad en un conjunto que contenga a $x_0$ y a todos los iterados, podemos escribir (en virtud del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial)

$$\varepsilon_{\ell+1} = \left[\varphi(x_{solucion}) + \varphi'(\xi)\,(x_\ell - x_{solucion})\right] - x_{solucion}$$

Como $x_{solucion} = \varphi(x_{solucion})$ tenemos

$$\varepsilon_{\ell+1} = \varphi'(\xi)\,(x_\ell - x_{solucion}) = \varphi'(\xi)\,\varepsilon_\ell$$

Si la derivada de la iteración tiene una cota en el conjunto, $|\varphi'| \leq M$ podemos escribir

$$|\varepsilon_{\ell+1}| = |\varphi'(\xi)|\,|\varepsilon_\ell| \leq M|\varepsilon_\ell|$$

Aplicando este resultado, tendremos

$$|\varepsilon_{\ell+1}| \leq M|\varepsilon_\ell| \leq M^2|\varepsilon_{\ell-1}| \leq M^3|\varepsilon_{\ell-2}| \leq \cdots \leq M^{\ell+1}|\varepsilon_0|$$

donde $\varepsilon_0$ es el error inicial. Notemos que si $M < 1$, entonces

$$\lim_{\ell\to\infty} |\varepsilon_{\ell+1}| \leq \lim_{\ell\to\infty} M^{\ell+1}|\varepsilon_0| = 0$$

Lo que implica que, independientemente del error cometido en la primera aproximación, el error tiende a cero. Es decir, converge.

**Los Conejos de Fibonacci, la Razón Áurea y las Fracciones Continuas**

A partir de la sucesión de Fibonacci y al proponer una expresión explícita para el término general, de la forma $x_\ell = r^\ell$ llegamos que debido a la recurrencia de los términos $r$ debía satisfacer la expresión

$$r^2 - r - 1 = 0$$

dividiendo a ambos miembros por $r$ obtenemos la *ecuación de la razón áurea*

$$r - 1 - \frac{1}{r} = 0$$

Con esta expresión podemos generar un esquema iterativo

$$r_{\ell+1} = \varphi(r_\ell) = 1 + \frac{1}{r_\ell}$$

el cual genera la sucesión

$$\left\{1, 1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}, \ldots\right\}$$

Esta sucesión converge, pero notemos que

$$\varphi'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

en $r = 1$ tenemos $|\varphi'(1)| = 1$. Esto no nos garantiza la convergencia, pero si hubiéramos comenzado por un número apenas más grande que la unidad cumple la condición de convergencia. Es claro que la condición que se demostró fue de suficiencia, no de necesidad.

Si hubiéramos comenzado por $r_1 = 2$ la fracción continua converge a la razón aurea con la condición de la derivada satisfecha

**Aceleración de Convergencia.** Si bien los esquemas iterativos generan una sucesión convergente (bajo las condiciones de convergencia, claro), a veces dicha convergencia es lenta.

Es común en cálculo numérico generar una sucesión a partir de la original que acelere la convergencia (en términos de que el error se haga cero más rápidamente). Un mecanismo de esta característica se lo conoce como *Método* $\Delta^2$ *de Aitken* o *Extrapolación de Aitken* (para detalles ver [9] y [10]).

**Método de Newton-Raphson.** Para concluir esta parte de métodos de resolución de ecuaciones no lineales, vamos a considerar un método de los denominados *super convegentes: El Método de Newton-Raphson.*

El problema continúa siendo el de hallar una solución a la ecuación

$$f(x) = 0 \qquad x \in [a, b]$$

Para este propósito si $\alpha$ es la raíz, comenzamos por un valor $x_0$ y aproximamos en ese punto con la tangente y le hallamos la raíz a la recta tangente, con lo que el $x_1$ se obtendrá a partir de

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Si ahora generamos la sucesión

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}, \qquad \text{con} \qquad x_{\ell+1} = x_\ell - \frac{f(x_\ell)}{f'(x_\ell)}$$

Tendremos la sucesión que -esperamos- converja al valor deseado, $\alpha$.

**Convergencia.** A partir de la relación

$$x_{\ell+1} = x_\ell - \frac{f(x_\ell)}{f'(x_\ell)}$$

Si desarrollamos la expresión $\frac{f(x_\ell)}{f'(x_\ell)}$ alrededor de $\alpha$

$$\frac{f(x_\ell)}{f'(x_\ell)} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]_{x=\alpha}(x_\ell - \alpha) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]_{x=\xi}(x_\ell - \alpha)^2$$

y dado que $f(\alpha) = 0$ tendremos que los coeficientes satisfacen:

a. $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0$

b. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right] = \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]_{x=\alpha} = 1$

c. $\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left[1 - \frac{f'(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right] = -\frac{[f'(x)f''(x)+f(x)f'''(x)]f'^2(x) - f(x)f''(x)2f'(x)f''(x)}{f'^4(x)}$

Entonces,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]_{x=\xi} = -\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

Reemplazando en la iteración, tendremos

$$x_{\ell+1} = x_\ell - \left[(x_\ell - \alpha) - \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}(x_\ell - \alpha)^2\right]$$

Si llamamos $\varepsilon_{\ell+1} = x_{\ell+1} - \alpha$ y lo propio para cualquier elemento de la sucesión

$$\varepsilon_{\ell+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\varepsilon_\ell^2$$

Si en el intervalo en cuestión tenemos $\left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right| \leq M$ tendremos que

$$|\varepsilon_{\ell+1}| \leq \frac{1}{M}|M\varepsilon_\ell|^2$$

Entonces, aplicando ahora esta cota a $\varepsilon_\ell$ tendremos que

$$|\varepsilon_{\ell+1}| \leq \frac{1}{M}|M\varepsilon_0|^{2^{\ell+1}}$$

Entonces, si el error inicial satisface que $M|\varepsilon_0| < 1$ la sucesión converge. Además converge rapidísimo! Este tipo de convergencia se denomina *superconvergencia.*

**Definición. Orden de Convergencia.** Dada una sucesión convergente a un valor $\alpha$. Sea $\varepsilon_\ell - \alpha$. Si existe un número $p$ y una constante $K$ tal que

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{|\varepsilon_{\ell+1}|}{|\varepsilon_\ell|^p} = K$$

entonces $p$ es llamado *orden de convergencia* de la sucesión y a la constante $K$ se la denomina *constante de error asintótico.*

Existen varios métodos de resolución de ecuaciones no lineales, tales como el *dicotómico*, *método de la secante*, *regula falsi*, etc. Estos métodos están desarrollados en la bibliografía sugerida [9] y [10] y es parte de un curso de *cálculo numérico.* En este estudio sólo vimos estos dos métodos para ejemplificar sucesiones.

### 4.2.4 Sistemas Dinámicos Discretos. Órbitas

Como último ejemplo de sucesiones vamos a considerar *sistemas dinámicos unidimensionales.* En particular, vamos a considerar aquellos sistemas denominados *autónomos.* Para sistemas dinámicos más generales se puede consular en el libro de Sternberg [11].

Por sistema dinámico autónomo vamos a entender una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

Vamos a asumir que la función $f$ satisface las condiciones de existencia y unicidad de soluciones.

La idea es obtener la posición (o la magnitud física que represente $x$) en diferentes tiempos $t$.

La manera de resolver el problema de forma general es a través de la expresión (es a variable separable)

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(u)}\, du \quad \text{e invertir} \quad x(t) = \mathcal{X}(t; t_0)$$

Sin embargo, esa no es la motivación para este enfoque, sino que buscaremos aproximar los valores de $x_1, x_2, \ldots$ a tiempos $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

Para este propósito, aproximemos la derivada de la manera

$$\frac{dx}{dt}(t_\ell) \approx \frac{x(t_{\ell+1}) - x(t_\ell)}{t_{\ell+1} - t_\ell}$$

Entonces, sustituyendo la aproximación en la ecuación diferencial

$$\frac{x(t_{\ell+1}) - x(t_\ell)}{t_{\ell+1} - t_\ell} = f(x_\ell)$$

Si consideramos una partición del tiempo equiespaciada, $t_{\ell+1} - t_\ell = h$, para todo $\ell$, entonces, podemos simplificar

$$x(t_{\ell+1}) - x(t_\ell) = f(x_\ell)\, h$$

Y generamos la sucesión recurrente $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ definida por

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ x_{\ell+1} = x_\ell + f(x_\ell)\, h \end{cases}$$

En cálculo numérico, esta discretización se conoce como *Método de la Poligonal de Euler.*

**El Mapa Logístico.** Un ejemplo simple, pero a la vez rico en propiedades es aquel que modeliza el crecimiento de una determinada población.

El *mapa logístico* es una discretización de las ecuaciones diferenciales *logísticas* [12] en las cuales la discretización toma la forma

$$x_{\ell+1} = \mu\, x_\ell\, (1 - x_\ell) \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Este sistema dinámico es una iteración como las que se vieron en aproximaciones sucesivas.

Lo interesante del estudio de mapas logísticos es en función de los posibles valores que pueda tomar $\mu$ y la característica de la convergencia. En particular, variando $\mu$ aparecen situaciones que son paradigmáticas a la hora de estudiar *regularidad y caos* en sistemas dinámicos.

# 5 Series Numéricas

Hemos señalado al inicio de este trabajo que al ser el estudio de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales el rol de las series es central. En virtud de esta afirmación, realizaremos un repaso de los resultados principales relacionados a series, comenzando por series numéricas, para luego extender los resultados a series de funciones.

## 5.1 Definiciones. Criterios elementales

Vamos ahora a considerar sumas del tipo

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell.$$

Ejemplos de este tipo de expresiones son frecuentes, aunque a veces no reparemos en ello.

**Representación decimal.** Consideremos un número irracional represenado decimalmente. Es claro que si $\alpha$ es el número en consideración, éste tendrá una representación decimal infinita y no periódica. Supongamos que $\alpha = [\alpha] + (\alpha)$ donde $[\alpha]$ indica la parte entera de $\alpha$ y $(\alpha)$ su parte decimal. Entonces

$$(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{\infty} d_\ell \, 10^{-\ell},$$

donde $0 \leq d_\ell \leq 9$.

**Serie geométrica.** Un ejemplo conocido es la *serie geométrica* la cual tiene la forma

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell$$

donde $r$ es un número al que llamamos razón.

### 5.1.1 Series y Sucesiones

**Sumas parciales.** La expresión de una serie tiene el infinito en el límite superior de la sumatoria. Esto nos conduce a pensar la serie como el límite

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell$$

Con esto podemos pensar que las sumas parciales, $\sum_{j=0}^{\ell} a_j$, forman una sucesión

$$s_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_j,$$

de modo que estudiar la serie es estudiar el límite de la sucesión.

**Serie geométrica.** Nuevamente trabajemos con la serie geométrica, pero ahora tratando de encontrar una expresión para la suma parcial (o lo que es lo mismo, para la sucesión asociada).

Tenemos que

$$s_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} r^j$$

si multiplicamos por $r$ a ambos miembros, obtenemos

$$r\, s_\ell = \sum_{j=1}^{\ell+1} r^j$$

Si en el miembro de la derecha sumamos y restamos 1 y separamos el último término de la sumatoria, obtenemos

$$r\, s_\ell = -1 + \underbrace{1 + \sum_{j=1}^{\ell} r^j}_{\sum_{j=0}^{\ell} r^j = s_\ell} + r^{\ell+1}$$

entonces,

$$r\, s_\ell = -1 + s_\ell + r^{\ell+1}$$

Con lo que

$$(r-1)s_\ell = r^{\ell+1} - 1$$

Con lo que pudimos obtener el término general para la sucesión

$$s_\ell = \frac{r^{\ell+1}-1}{r-1} \quad \text{o} \quad s_\ell = \frac{1-r^{\ell+1}}{1-r}$$

En virtud de lo obtenido podemos notar que

- $r \neq 1$
- Si $r > 1$ entonces el término general de la serie crece más allá de toda cota, por lo que no puede tener un límite.
- si $r < 1$ la sucesión converge a

$$S = \lim_{\ell\to\infty} s_\ell = \lim_{\ell\to\infty} = \frac{1-r^{\ell+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

  ya que si $r < 1$, $\lim_{\ell\to\infty} r^\ell = 0$

Analizada como sucesión, podemos ver que satisface el criterio de Cauchy. Para $m > n$

$$|s_m - s_n| = r^{n+1} + r^{n+2} + \cdots + r^m = r^{n+1}(1 + r + \cdots + r^{m-n-1})$$

Entonces,

$$|s_m - s_n| = r^{n+1}(1 + r + \cdots + r^{m-n-1}) = r^{n+1}\frac{1-r^{m-n}}{1-r}$$

Como $m > n$ y si $r < 1$ entonces tenemos que podemos acotar

$$|s_m - s_n| < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Entonces, siempre existirá un $N$ tal que $\forall\varepsilon > 0$

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad m, n > N$$

Podemos notar que una <u>*condición necesaria*</u> (no suficiente) para que una serie sea convegente es que el término general $a_\ell$ tienda a cero conforme $\ell$ tiende a infinito.

## 5.2 Criterios de Convergencia

Dada una serie numérica, las alternativas son:

I. Convergente:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell = S$$

II. Divergente:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell = \pm\infty$$

III. Oscilante:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$$

oscila entre valores positivos y negativos

**Series de términos positivos.** En el caso en que todos los términos sean números positivos, la serie o converge o diverge. De ninguna manera puede ser oscilante.

En el caso en que de alguna manera podemos encontrar la expresión para la suma parcial, podremos inmediatamente determinar la convergencia o no de una serie.

Por lo general no es necesario conocer el valor del límite, sino saber si la serie bajo estudio es convergente o divergente. Para este análisis es preciso recurrir a los denominados *criterios de convergencia*.

### 5.2.1 Criterio de Comparación

Sean las series de términos positivos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \quad \text{y} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$$

donde la primera es convergente y la segunda, divegente. Sean $S_n^a$ y $S_n^b$ las sumas parciales para la primera y segunda serie, respectivamente.

Consideremos la serie de términos positivos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell$$

y sea $S_n$ la suma parcial.

El *criterio de comparación* establece que

(a) Si $S_n < S_n^a$, entonces la serie $\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell$ converge

(b) Si $S_n^b < S_n$, entonces la serie $\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell$ diverge

### 5.2.2 Criterio de D'Alembert

Consideremos la serie de términos positivos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$$

Supongamos que se cumple:

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} = \lambda$$

El *criterio de D'Alembert* también llamado *criterio del cociente* establece que

- Si $\lambda < 1$ la serie converge
- Si $\lambda > 1$ la serie diverge
- Si $\lambda = 1$ la convergencia es dudosa

En el primer caso, podemos afirmar que a partir de un cierto $a_m$ existe un número $r$, tal que $\lambda < r < 1$, y que se cumple $\frac{a_{m+1}}{a_m} < r$

Entonces, a partir de $m$, podremos escribir

$$a_{m+1} < r\, a_m, \quad a_{m+2} < r^2\, a_m, \quad a_{m+3} < r^3\, a_m, \ldots$$

Con lo cual

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} a_\ell < a_m \sum_{j=0}^{\infty} r^j$$

Además, como $r < 1$ tendremos que la serie mayor converge, por lo a partir del criterio de comparación, tendremos que la serie menor converge. Ahora, la serie original es descompuesta como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell = \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell + \sum_{\ell=m}^{\infty} a_\ell$$

lo que termina de probar el criterio de D'Alembert.

Si $\lambda > 1$ significa que el término general de la serie crece, por lo que no puede ser convergente, como ya se ha visto.

El caso dudoso, en el que $\lambda = 1$ se estudia mediante otro criterio, *el criterio de Raabe.*

**Criterio de Raabe.** En el caso de $\lambda = 1$ el criterio de Raabe se aplica de la siguiente manera: Sea

$$L = \lim_{\ell\to\infty} \ell \left[1 - \frac{a_{\ell+1}}{a_\ell}\right]$$

Si $L > 1$, la serie converge. Si $L < 1$ la serie es divergente.

Otra formulación del criterio de Raabe es la siguiente (en Whittaker & Watson [7]):

*Si existe un número positivo $\lambda$ tal que*

$$\lim_{\ell\to\infty} \ell \left[\frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} - 1\right] = -1 - \lambda,$$

*entonces la serie converge.*

### 5.2.3 Criterio de la raíz

Consideremos la serie de términos positivos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$$

de manera tal que a partir de un cierto $m$ se tiene que $a_m \leq r^m$.

Con esta hipótesis tenemos que

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell = \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell + \sum_{\ell=m}^{\infty} a_\ell$$

reemplazando la acotación tenemos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \leq \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell + r^m \sum_{j=0}^{\infty} r^j$$

Ahora, si $r < 1$ la serie del miembro de la derecha será convegente y por el criterio de comparación, la serie original también lo será.

Entonces, si

$$\lim_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{a_\ell} = r < 1$$

la serie

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$$

será convergente. Este criterio es denominado *criterio de la raíz.*

### 5.2.4 Criterio de la integral

Otro criterio de convergencia es provisto al considerar una serie como una suma de Riemann para la estimación de una integral impropia. La idea es, dada la serie

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$$

considerarla como la aproximación (suma de Riemann) de la integral impropia

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx$$

donde se considera $a_\ell = f(x_\ell)$ y donde el paso de aproximación $h = 1$. Este criterio se basa en, dada una integral impropia que sabemos convergente o divergente y construir una suma de Riemann inferior (para probar convergencia) o superior (para probar divergencia).

A partir de esta idea, es posible determinar la convergencia de las series del tipo

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^\alpha}$$

Las cuales serán convergentes para $\alpha > 1$ y divergentes para $\alpha < 1$.

## 5.3 Series alternadas

Una serie de términos alteradamente positivos y negativos se llama alternada. Un ejemplo es la siguiente

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell}$$

Claramente, esta serie no es ni divergente ni convergente, sino es *oscilante*.

### 5.3.1 Convergencia absoluta y condicional

Dada una serie alternada, un criterio inicial para la determinación de la convergencia es analizar el valor absoluto de cada uno de los términos y analizar la convergencia de la serie definida que ahora tendrá términos positivos.

Notemos que dada una serie alternada

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell},$$

*si la serie*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{\ell}|$$

*converge, entonces la serie converge.*

En efecto, aplicando el criterio de Cauchy, tomemos los términos

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|$$

y como la serie converge absolutamente, el término de la derecha se puede mantener menor que un $\varepsilon$ a partir de un par de números $m$ y $n$ suficientemente grandes.

Es sabido (comparar con la integral) que la serie

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}$$

es divergente.

Ahora, si analizamos la serie alternada

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{1}{\ell}$$

es convergente y su suma resulta $\ln(2)$. Este resultado puede obtenerse a partir de construir la serie de Taylor para la función $\ln(x)$ alrededor de $x_0 = 1$ y luego evaluar la serie en $x = 2$.

Este ejemplo permite asegurar que una serie alternada puede ser convergente sin necesidad que la serie a valores absolutos lo sea. Más aún, el criterio establece que es suficiente que la serie construida con los valores absoluto converja para que la serie alternada converja. La recíproca no está garantizada.

### 5.3.2 Criterio de Leibinz

El criterio de Leibinz permite analizar la convergencia de una serie alternada, sin necesidad de estudiar (la mayoría de las veces sin éxito) la convergencia absoluta.

*Si los valores absolutos de los términos de una serie alternada tienden monótonamente a 0, es decir* $|a_{\ell+1}| < |a_\ell|$ *la serie*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$$

*converge.*

Consideremos que $a_0 > 0$. Esto no resta generalidad. Entonces, llamemos:

. $b_0 = a_0$

. $b_1 = -a_1$

. $b_2 = a_2$

. y así sucesivamente

La serie original, será reescrita como $\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell \, b_\ell$ la cual admite dos reescrituras:

$$b_0 - (b_1 - b_2) - (b_3 - b_4) + (b_5 - b_6) + \cdots$$

y

$$(b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + (b_6 - b_7) + \cdots$$

Dado que la hipótesis es $b_0 < b_1 < b_2 < \ldots$ tendremos que

(a) La primera sumatoria comienza por un número positivo y van restando números positivos, por lo que

$$b_0 \geq b_0 - (b_1 - b_2) \geq b_0 - (b_1 - b_2) - (b_3 - b_4) \geq \ldots$$

(b) La segunda sumatoria comienza por un número positivo y van sumando números positivos, por lo que

$$b_0 - b_1 \leq (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) \leq (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) \leq \ldots$$

Con esta observación tendremos sobre las sumas parciales

I. las sumas parciales pares decrecen monótonamente

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots$$

II. las sumas parciales impares crecen monótonamente

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$$

Visto como sucesiones, las sumas impares crecen monótonamente, pero estan acotadas por $b_0$, por lo que tienen límite, $L_i$. Lo mismo ocurre con las sumas parciales pares, ellas decrecen monótonamente, pero están acotadas inferiormente por $b_1$, por lo que tienen límite, $L_p$. Como además, la resta entre las sumas parciales pares e impares tienden a cero, conforme el índice crece, tendremos que el límite debe ser el mismo, $L$. Lo que implica que la serie alternada es convergente.

**Reordenamiento de términos.** A diferencia de lo que ocurre en series de términos positivos, en series alternadas es posible *reordenar* términos y cambiar el valor del límite. Aún transformar una serie condicionalmente convergente en divergente. Un estudio bastante detallado puede encontrarse en el libro de Courant & John [1], pp 534-536.

Tomemos el ejemplo presentado en el libro de Courtan. Consideremos la serie alternada la cual converge condicionalmente

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Multiplicando a ambos miembros por $\frac{1}{2}$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - + \dots$$

Si sumamos a ambos miembros, podemos notar que construimos la serie alternada original, pero donde los términos aparecen en otros lugares

$$\frac{3}{2}\ln(2) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + - \dots$$

Ahora, la representación de $\ln(2)$ y de $\frac{3}{2}\ln(2)$ tienen los mismos términos, reordenados. Y claramente el resultado es diferente.

# 6 Series de potencias

Con el estudio previo de series numéricas vamos a estudiar las *series de potencias* las cuales son de la forma de las series de Taylor

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \, x^\ell$$

En términos generales, pueden escribirse como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \, (x - x_0)^\ell$$

donde $x_0$ es denominado *centro* del desarrollo.

En principio, el estudio de las series de potencias se realizará como si la indeterminada $x$ sea un número y aplicaremos los criterios de convergencia ya conocidos.

Al considerarse $x$ como un número real, el análisis de la convergencia determinará un conjunto en la variable para el cual la serie sea convergente. Este conjunto será denominado *radio de convergencia.*

## 6.1 Radio de convergencia

Básicamente, para la determinación del radio de convergencia aplicaremos el *criterio de D'Alembert*.

Dada la serie de potencias

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \, x^\ell$$

vamos a imponer

$$\lim_{\ell\to\infty}\left|\frac{a_{\ell+1}\, x^{\ell+1}}{a_\ell\, x^\ell}\right| = \lim_{\ell\to\infty}\frac{|a_{\ell+1}\, x^{\ell+1}|}{|a_\ell\, x^\ell|} = \lim_{\ell\to\infty}\frac{|a_{\ell+1}|}{|a_\ell|}|x| < 1$$

Si llamamos

$$\frac{1}{r} = \lim_{\ell\to\infty}\frac{|a_{\ell+1}|}{|a_\ell|}$$

tendremos que $|x| < r$ donde $r$ es el *radio de convergencia*.

Si la serie hubiera tenido el centro en $x_0$ el radio de convergencia se calcula a partir de $|x - x_0| < r$

Al aplicar el criterio de D'Alembert, dentro de radio de convergencia garantizamos la *convergencia absoluta*. Sin embargo es necesario analizar qué ocurre en los límites del intervalo para estudiar la *convergencia condicional*.

Para consolidar la idea, consideremos siguiente ejemplo: Analizar la convergencia absoluta y condicional de la serie de potencias

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\ell}\, 3^\ell}}_{a_\ell} (x-2)^\ell$$

Entonces,

$$\frac{|a_{\ell+1}|}{|a_\ell|} = \frac{\sqrt{\ell}}{3\sqrt{\ell+1}} = \frac{\sqrt{\ell}}{3\sqrt{\ell}\sqrt{1+\frac{1}{\ell}}}$$

Entonces, tomando límite resulta $\frac{1}{r} = \frac{1}{3}$ por lo que el radio de convergencia será

$$|x-2| < 3 \qquad \to \qquad x \in (-1, 5)$$

Dentro del intervalo abierto $(-1, 5)$ la serie converge absolutamente. Para analizar la convergencia puntual debemos estudiar las series resultantes de evaluar $x = -1$ y $x = 5$. Notemos que $x = 5$ define la serie

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ell}\, 3^\ell} (5-2)^\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ell}\, 3^\ell} 3^\ell = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \qquad \text{divergente}$$

En cambio, si reemplazamos en $x = -1$ resulta la serie

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\sqrt{\ell}} \qquad \text{Por criterio de Leibinz, condicionalmente convergente}$$

Entonces, la serie de potencias original es absolutamente convergente para $x \in (-1, 5)$, condicionalmente convergente en $x = -1$ y divergente en $x = 5$.

# 7 Sucesiones de funciones

Para el análisis matemático, los procesos de límite son escenciales. No sólo para sucesiones y series numéricas, sino fundamentalmente para sucesiones y series de funciones.

En el caso de las series de potencias, aún siendo series de Taylor de funciones infinitamente derivables, el análisis de convergencia estudiado no nos permite saber más de que dentro del intervalo de convergencia cualquier $x$ que se sustituya dará como resultado una serie convergente.

Vamos ahora a estudiar sucesiones de funciones del tipo

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

y ver si existe el límite

$$\lim_{\ell \to \infty} f_\ell(x)$$

En este punto hay que tener cuidado sobre qué sentido tiene la convergencia.

Si consideramos un $x_0$ determinado, transformamos el problema al análisis de convergencia de una suceción en $\mathbb{R}$, por lo que

*Dado un $x_0$ en el dominio de las funciones de la sucesión*

$$\{f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), \dots\}.$$

*Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N$ ($N(\varepsilon, x_0)$) para el cual*

$$|f_\ell(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \textit{siempre que} \qquad \ell > N$$

*Entonces, diremos que la sucesión converge puntualmente a $f(x)$ en $x = x_0$.*

**Observación.** Si bien, para todo $x$ del intervalo común de definición de las funciones de la sucesión cada sucesión converge al valor de la función en el punto dado, esta convergencia es en el sentido puntual, es decir, nos arroja el valor de la función "límite" en cada punto.

Este tipo de convergencia es puntual, también denominada *no uniforme*. La sucesión de funciones no converge a la función, sino que en cada punto converge al valor en cada punto.

*Otra convergencia más fuerte es* que la sucesión de funciones converja a una función independientemente del punto del intervalo. Esta convergencia se denomina *convergencia uniforme*.

## 7.1 Convergencia uniforme

La convegencia uniforme de una sucesión de funciones es un tipo de convergencia *funcional*, no numérica. Esto significa que, dada una sucesión de funciones

$$\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$$

la sucesión converge a la función $f$.

Notemos que para esta categoría de convergencia no hemos puesto la dependencia con $x$ en las funciones. Escribir de esta manera la sucesión y la función límite permite decir que la convergencia es a una función, no a los valores de la función.

Aquí nuestro estudio particular de funciones de una variable real (que extenderemos a funciones de variable compleja) puede jugarnos un papel confuso.

El estudio de sucesiones en espacios topológicos (para detalle, consultar el libro de Rudin [6]) lo fundamental es la noción de *distancia*. Es a través de esta definición que podremos conceptualizar las "cercanías" entre elementos.

En el espacio de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ existen varias definiciones de distancias

(i) Distancia *cuadrática*:
$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(t) - g(t)]^2 \, dt}$$

(ii) Distancia *de orden p*:
$$d_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t) - g(t)|^p \, dt}$$

(iii) Distancia *infinito*:
$$d_\infty(f, g) = |f(x) - g(x)|, \qquad \forall x \in [a, b]$$

En espacios métricos (en los cuales están definidas distancias), la convergencia de una sucesión vendrá dada a partir de

*Una sucesión de funciones $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ diremos que converge a la función $f$ en el sentido de la distancia definida si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \textit{tales que} \quad d_{\textit{distancia definida}}(f_\ell, f) < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad N > \ell$$

Para el caso de la *distancia infinito* la definición de convergencia es la que define la convergencia uniforme

**Definición. Convergencia uniforme.**

*Una sucesión de funciones $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ diremos que converge uniformemente a la función $f$ si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \textit{tales que} \quad |f_\ell(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad N > \ell, \ \forall x \in [a, b]$$

La convergencia uniforme garantiza la convegencia puntual o no uniforme. La recíproca no está garantizada.

Podemos notar entonces que la definición de convergencia puntual y uniforme utiliza la misma expresión, el valor absoluto. Esto representa la mayor fuente de confusión.

La diferencia en la definición no radica en la expresión de la desigualdad, sino en donde aparece el $\forall x$. En el caso de la convegencia puntual, la prueba de convergencia comienza con el $\forall x$ y en la prueba de convergencia uniforme, el $\forall x$ aparece al final. Significa que la convergencia uniforme no depende de $x$, mientras que la convergencia puntual, si.

## 7.2 Criterio de Cauchy para la convergencia

Del mismo modo que aplicamos para las sucesiones numéricas, el *criterio de Cauchy* puede formularse para sucesiones. Tanto para la convergencia puntual como uniforme

(a) **Criterio de Cauchy para la convergencia puntual.** *Dado un $x_0$ en el dominio de las funciones de la sucesión*

$$\{f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), \dots\}.$$

*Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N$ $(N(\varepsilon, x_0))$ para el cual*

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon \qquad \textit{siempre que} \qquad m, n > N$$

*Entonces, diremos que la sucesión converge al valor de la función $f(x)$ en $x = x_0$.*

(b) **Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.** *Dada la sucesión*

$$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}.$$

*Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N$ $(N(\varepsilon))$ para el cual*

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \textit{siempre que} \qquad m, n > N, \forall x$$

*Entonces, diremos que la sucesión converge uniformemente a la función $f(x)$ en $[a, b]$.*

## 7.3 Sucesiones de funciones continuas uniformemente convergentes

Supongamos una sucesión de funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ la cual es uniformemente convergente a una función $f(x)$. Entonces, la función límite es continua.

En efecto, como la sucesión de funciones es uniformemente convergente, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon) > 0$ para los cuales se cumple

$$|f_\ell(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad N > \ell, \;\; \forall x \in [a, b]$$

lo que debemos analizar es

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(x_0) + f_\ell(x) - f_\ell(x_0) - f_\ell(x) - f_\ell(x_0)|$$

reordenando y acotando, tenemos

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_\ell(x) - f(x)| + |f_\ell(x_0) - f(x_0)| + |f_\ell(x) - f_\ell(x_0)|$$

Ahora, como la sucesión converge uniformemente y como las funciones $f_\ell(x)$ son continuas en $x_0$, tenemos que podemos asumir

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f_\ell(x) - f(x)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_\ell(x_0) - f(x_0)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_\ell(x) - f_\ell(x_0)|}_{<\varepsilon/3}$$

Los primeros dos términos se mantienen menores de $\varepsilon/3$ en virtud de la convergencia uniforme. El tercer término se mantiene menor que $\varepsilon/3$ debido a la continuidad de las funciones $f_\ell(x)$ así que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \text{siempre que } |x - x_0| < \delta$$

lo que prueba la continuidad.

## 7.4 Sucesiones de funciones derivables uniformemente convergentes

Vamos ahora a analizar la derivabilidad de una función que es límite de una sucesión uniformemente convergente.

Sea $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ una sucesión de funciones derivables puntualmente convergente en el intervalo $(a, b)$. Si la función de derivadas $\{f_1'(x), f_2'(x), f_3'(x), \dots\}$ converge uniformemente a una función en $(a, b)$, entonces la sucesión $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$ converge uniformemente a una función derivable $f(x)$ y para todo $x \in (a, b)$ $\lim_{\ell\to\infty} f_\ell'(x) = f'(x)$

Veamos, definamos las funciones

$$g_\ell(x) = \begin{cases} \frac{f_\ell(x)-f_\ell(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f_\ell'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

Como las funciones $f_\ell(x)$ son derivables, se deduce que las funciones $g_\ell(x)$ son continuas en $x_0$. Lo mismo ocurre en todos los puntos del intervalo $(a, b)$.

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Analicemos la diferencia y apliquemos el teorema del valor medio a la función derivable $f_m(x) - f_n(x)$

$$\begin{aligned} g_m(x) - g_n(x) &= \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)]}{x - x_0} \\ &= [f_m(x) - f_n(x)]'\big|_{x=\xi} = f_m'(\xi) - f_n'(\xi) \end{aligned}$$

donde $\xi$ es un punto intermedio entre $x_0$ y $x$. Para el uso del teorema del valor medio estamos suponiendo que las funciones tienen las derivadas continuas.
Entonces,

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|$$

Además, en $x_0$ tenemos

$$|g_m(x_0) - g_n(x_0)| = |f_m'(x_0) - f_n'(x_0)|$$

Sea $\varepsilon < \sup_{t\in(a,b)} \{|f_m'(x_0) - f_n'(x_0)|\}$ podemos escribir

$$|g_m(x) - g_n(x)| = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| < \varepsilon$$

Como las $f_\ell(x)$ satisfacen la condición de Cauchy, las funciones $g_\ell(x)$ también la satisfacen. Con lo cual, la sucesión $\{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ converge uniformemente.

Sea $y_0 = \lim_{\ell\to\infty} f_\ell(x_0)$ y sea $g = \lim_{\ell\to\infty} g_\ell(x)$ el límite uniforme de la sucesión $\{g_1, g_2, g_3, \dots\}$

Notemos que ya que $x - x_0$ está acotado en el intervalo $(a, b)$ tendremos que la sucesión

$$f_\ell(x) = f_\ell(x_0) + g_\ell(x)(x - x_0)$$

converge uniformemente a $y_0 + g(x)(x - x_0)$. Como además $g$ es continua en $x_0$ tenemos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Queda demostrado que f es derivable en $x_0$ , y que $f'(x_0) = \lim_{\ell\to\infty} f_\ell'(x_0)$. Entonces $f'(x) = \lim_{\ell\to\infty} f_\ell'(x)$.
Lo garantizado es que si la sucesión de derivadas converge uniformemente, entonces, la funciones primitivas también. La recíproca no es válida. Como ejemplo, la sucesión
$f_\ell(x) = [\sin(2\pi\ell x)]/\ell$ converge uniformemente, pero su derivada no converge en ningún punto.

# 8 Series de funciones

Vamos a considerar ahora series del tipo

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(x)$$

Es decir, a partir de la sucesión de funciones $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$ definimos una serie y ya no nos preocuparemos por el límite de la sucesión $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$, sino que estudiaremos el límite de las sumas parciales

$$s_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} f_\ell(x)$$

La sucesión que estudiaremos será $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$

Ya que cada suma parcial es una función, podemos estudiar las series de funciones con las mismas herramientas que se definieron en el estudio de sucesiones de funciones. Esto significa que aquí también debemos hacer la distinción entre convergencia puntual y convergencia uniforme. A partir del criterio de Cauchy para convergencia uniforme, una serie de funciones es uniformemente convergente si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tales que

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{n+1}^{m} f_\ell(x)\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n, m > N, \ \forall x \in (a, b)$$

## 8.1 Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme.

El *criterio de Weierstrass* o *prueba M de Weierstrass* es un criterio basado en una condición suficiente para que una serie de funciones sea uniformemente convergente.

**Teorema.** *Dada una serie de funciones*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(x)$$

*que converge puntualmente a una función $f(x)$ en un intervalo $(a, b)$. Si existe una serie numérica de términos positivos*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} M_\ell$$

*tal que*

$$|f_\ell(x)| \leq M_\ell \quad \forall n \geq 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

*entonces, la serie converge uniformemente en $(a, b)$.*

Sea $s_n(x)$ y $s_m(x)$ sumas parciales, con $m > n$. Calculemos

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{\ell=0}^{m} f_\ell(x) - \sum_{\ell=0}^{n} f_\ell(x)\right| = \left|\sum_{\ell=n+1}^{m} f_\ell(x)\right|$$

Tenemos además

$$\left|\sum_{\ell=n+1}^{m} f_\ell(x)\right| \leq \sum_{\ell=n+1}^{m} |f_\ell(x)|$$

Por hipótesis del teorema, cada término está acotado por lo que podemos afirmar

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq \sum_{\ell=n+1}^{m} |f_\ell(x)| \leq \sum_{\ell=n+1}^{m} M_\ell$$

Ahora, por hipótesis, dado que la serie $\sum_{\ell=0}^{\infty} M_\ell$ converge, podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tales que se cumple

$$|M_m - M_n| = \sum_{\ell=n+1}^{m} M_\ell < \varepsilon, \quad \text{siempre que} \quad m, n > N$$

Entonces escogiendo estos $m$ y $n$ tenemos que

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq \sum_{\ell=n+1}^{m} M_\ell < \varepsilon, \quad \text{siempre que} \quad m, n > N$$

lo que prueba que la serie

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(x)$$

converge uniformemente, ya que se cumple para todo $x$ en $(a, b)$.

## 8.2 Convergencia uniforme para series de potencias

Las series de potencias, son series de funciones cuya particularidad es que

$$f_\ell(x) = a_\ell \, x^\ell$$

Para la prueba de convergencia uniforme de una serie de potencias nos valdremos del siguiente teorema.

**Teorema.** *Si la serie de potencias*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \, x^\ell$$

*converge puntualmente en* $x = x_1 \in (a, b)$ *entonces se tiene que*

*i)* *La serie converge uniformemente en* $x \leq R < x_1$, $R$ *es el radio de convergencia uniforme*

*ii)* *La serie converge absolutamente para todo* $x < x_1$

Dado que la serie converge puntualmente en $x_1$ tendremos que $|a_\ell \, x_1^\ell| < 1$ a partir de un cierto $\ell > N$. Sea $R < x_1$ y $\ell > N$ tenemos entonces

$$|a_\ell \, x^\ell| = \left| a_\ell \, x_1^\ell \, \left[\frac{R}{x_1}\right]^\ell \right| < \left[\frac{R}{x_1}\right]^\ell = t^\ell \quad \text{con } t < 1$$

Entonces, estamos en las condiciones del criterio de Weierstrass, ya que está dominada por una serie geométrica convergente. Entonces, la serie converge uniformemente. La parte *ii)* está contenida en la parte *i)*.

## 9 Bibliografía recomendada

[1] Courtant, Richard; John, Fritz, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Vol. I, Ed. Limusa Noriega, (1990)

[2] Dedekind, Julius W. R. *Continuidad y Números Irracionales*, Cartas de Dedekind, 1872. Traducción provisional y comentarios por J. Bares y J. Climent. Disponible en `http://www.uv.es/~jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf`

[3] Hirschman, Isaac, *Infinite Series*, Ed. Dover (2014, reimpresión de la edición de 1962)

[4] Pétard, H. *A Contribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting.* The American Mathematical Monthly, Vol 45. Nro 7. (1938)

[5] Rey Pastor, Julio, *Curso de Cálculo Infinitesimal*, 5a edición, Ed. Buenos Aires. (1948)

[6] Rudin, Walter, *Principios de Análisis Matemático*, Ed. Mc Graw Hill (1980)

[7] Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *A Course of Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)

[8] Miller, Charles; Heeren, Vern; Hornsby, John, *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Ed. Pearson-Addison Wesley, décima edición (2006)

[9] Dahlquist, Germund and Björck, Åke, *Numerical Methods*, Ed. Dover, (2003)

[10] Henrici, Peter, *Elementos de Análisis Numérico*, Ed. Trillas, (1972)

[11] Sternberg, Shlomo, *Dynamical Systems*, Ed. Dover, (2010)

[12] Arnol'd, Vladimir, *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer, segunda edición (2006)

[13] Knopp, Konrad, *Theory and Application of Infinite Series*, Ed. Blackie & Son Ltd, segunda edición (1954)

[14] Apostol, Tom, *Calculus*, segunda edición, Tomo I, Ed. Reverté, (1984)