# Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales

# Estabilidad Lineal

# 1. Introducción

En este material vamos a considerar sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, esto es, problemas de valor inicial de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(\mathbf{x};t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\mathbf{x};t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(\mathbf{x};t) \end{aligned}$$

además, consideraremos que las funciones $f_j$ son analíticas en un determinado dominio, de manera tal de que podamos aplicar el Teorema de Cauchy.

En particular, diremos que el sistema es *autónomo* si las funciones no dependen explícitamente del parámetro $t$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(\mathbf{x}) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

En textos clásicos, es común encontrarse con la notación

$$\frac{dx_1}{f_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{f_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(\mathbf{x})}$$

Dado que las funciones son analíticas, es posible construir las series formales, o, a partir de un criterio de truncamiento, los desarrollos asintóticos.

Consideremos algunos ejemplos.

**El Péndulo Simple.** Dado un péndulo de longitud $l$. Sea $x$ el ángulo respecto de la vertical. Sea $y$ la velocidad angular. Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la partícula será:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}(x) \end{aligned}$$

donde $g$ es la aceleración de la gravedad.

**El Problema de Predador Presa de Lotka-Volterra.** Consideremos un sistema ecológico compuesto por dos especies, por ejemplo, zorros y conejos en un determinado espacio. Sea $x$ la cantidad de conejos e $y$ la cantidad de zorros. El sistema de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica poblacional en la región del espacio donde sólo hay zorros y conejos será

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a\,x - b\,xy\\ \frac{dy}{dt} &= -c\,y + d\,xy\end{aligned}$$

donde consideramos $a$, $b$, $c$ y $d$ números reales positivos.

**Ecuaciones de Euler del Cuerpo Rígido.** Dado un sólido con momentos principales de inercia $I_1$, $I_2$ e $I_3$, el sistema de ecuaciones diferenciales para la evolución rotacional respecto a los ejes principales de inercia, será

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,\omega_2\,\omega_3 + N_1\\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{I_3 - I_1}{I_2}\,\omega_3\,\omega_1 + N_2\\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{I_1 - I_2}{I_3}\,\omega_1\,\omega_2 + N_3\end{aligned}$$

Donde $N_1$, $N_2$ y $N_3$ son las componentes del torque externo.

**Especies Competidoras.** De la misma manera con la que analizamos el modelo predador-presa podemos estudiar el problema en el cual dos especies compiten por el mismo alimento (esto puede ser también llevado al contexto de la economía, por ejemplo)

El sistema de ecuaciones que modeliza este problema es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(\varepsilon_1 - \sigma_1\,x - \alpha_1\,y)\\ \frac{dy}{dt} &= y(\varepsilon_2 - \sigma_2\,y - \alpha_2\,x)\end{aligned}$$

donde los parámetros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$ son todos positivos.

En el caso en que las especies no compitan por alimento, $\alpha_1$ y $\alpha_2$ serán nulas, y para cada especie tendremos ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(\varepsilon_1 - \sigma_1\,x)\\ \frac{dy}{dt} &= y(\varepsilon_2 - \sigma_2\,y)\end{aligned}$$

Las cuales se llaman *ecuaciones logísticas* y las cuales modelizan la evolución de una especia en un determinado ambiente.

Salvo lo referido a la construcción de las series formales, o las iteraciones para hallar las aproximaciones mediante el método de Picard, no hay una teoría respecto a la construcción de las soluciones.

Sin embargo, se ha desarrolado teoría en aspectos cualitativos de los sistemas no lineales.

# 2. Estudio de Sistemas en $\mathbb{R}^2$

Si bien la teoría de sistemas no lineales es general, el caso para $n = 2$, es decir, sistemas en el plano $\mathbb{R}^2$ tiene un particular interés debido a que la posibilidad de graficar las soluciones -o lo que consigamos- permite una visualización y posibilita una mejor comprensión del problema. Entonces, en lo que sigue consideraremos sistemas no lineales (y autónomos) de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y) \end{aligned}$$

## 2.1. Integrales Primeras

Si a partir del sistema, multiplicamos la primera ecuación por $Q(x,y)$ y la segunda ecuación por $P(x,y)$ y restamos ambas ecuaciones, tenemos

$$-Q(x,y)\,\frac{dx}{dt} + P(x,y)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

El lado izquierdo de la expresión puede verse como la derivada total respecto del tiempo de una, por ejemplo, función $H(x,y)$. En efecto,

$$\frac{d}{dt}[H] = \frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}$$

Identificando los términos, tenemos

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ P(x,y) &= \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}$$

Con lo que resulta

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

entonces, tenemos una integral primera $H(x,y) = cte$ y reescribiendo el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

Que, si $x$ hubieran sido coordenadas, $y$ momentos y $H$ la función Energía Mecánica (Hamiltoniano) las ecuaciones obtenidas se denominan *ecuaciones canónicas de Hamilton.*

Claramente, antes que nada hay que comprobar que

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = 0$$

ya que debe ser una ecuación exacta.

Este abordaje es muy introductorio pero permite vislumbrar un método para estudiar sistemas de dimensiones mayores a 2. El trabajo con el sistema de ecuaciones para encontrar integrales primeras dió lugar a la teoría denominada *geometría simpléctica* que relaciona integrales primeras con aspectos geométricos (áreas, volúmenes, etc). Henri Poincaré hizo aportes muy relevantes en esta materia.

El estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales abrió paso a una disciplina específica denominada *Sistemas Dinámicos*.

Los *sistemas dinámicos* pueden ser continuos (ec. diferenciales) o discretos, los cuales son llamados *mapeos*.

## 3. Producto Directo

En ocasiones podemos encontrarnos con ecuaciones diferenciales desacopladas

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x), \qquad x \in U_1 \\
\frac{dy}{dt} &= g(y), \qquad y \in U_2
\end{aligned}$$

Cada ecuación podría haberse tratado como un problema en la recta real ($U_1 \subset \mathbb{R}$, $U_2 \subset \mathbb{R}$). El producto directo es considerar $x$ e $y$ como parte de un plano (plano de fases) con la particularidad de que el sistema estaba desacoplado.

Lo que el producto directo fuerza es que la curva solución, para determinado problema de valor inicial, tendrá un dominio en la variable independiente $t$ tanto para $x(t)$ como para $y(t)$, que consideradas las ecuaciones por separado esta imposición no existiría.

Para este caso bidimensional, la integración del sistema, al menos formalmentes es trivial,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)}dx &= dt \\
\frac{1}{g(y)}dy &= dt
\end{aligned}$$

Llamando $x_0$ e $y_0$ a las condiciones en $t = t_0$ podemos escribir las soluciones

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(x^*)}\, dx^* &= t - t_0 \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y^*)}\, dy^* &= t - t_0
\end{aligned}$$

o, equivalentemente, debido a la igualdad,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(x^*)}\, dx^* = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y^*)}\, dy^* + K$$

y la variable $t$ queda eliminada. Esta es la expresión de la curva integral $F(x, y) = 0$.

La idea de producto de directo permite reolver sistemas acoplados de manera más sencilla. Veamos el siguiente ejemplo.

**Modelo Predador-Presa de Lotka-Volterra.**

Ya hemos presentado el sistema que describe la población de dos especies de tal manera que una se alimenta de la otra, por caso, el problema de zorros y conejos. El sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a\,x - b\,xy \\ \frac{dy}{dt} &= -c\,y + e\,xy\end{aligned}$$

donde $x$ son las presas e $y$ los predadores. Además, $a, b, c, e$ son reales positivos.

Si hacemos el cociente de ambas ecuaciones, podemos escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(e\,x - c)}{x(a - b\,y)}$$

que es a variables separables,

$$\frac{(a - by)}{y}\,dy = \frac{(e\,x - c)}{x}\,dx$$

el cual es de sencilla resolución

$$a\,\ln(y) - b\,y = e\,x - c\,\ln(x) + K$$

o, equivalentemente,

$$f_1(x) + f_2(y) = C$$

con

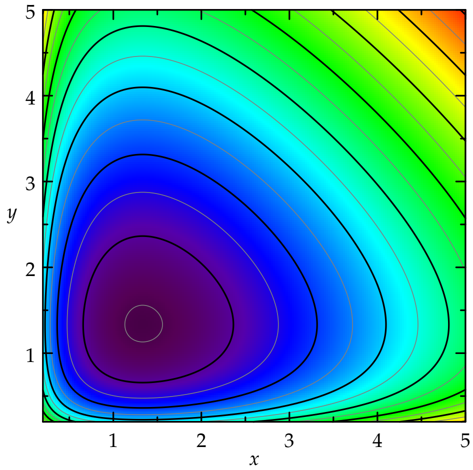
$$f_1(x) = e\,x - c\,\ln(x), \qquad f_2(y) = b\,y - a\,\ln(y)$$

Además, dado que todos los números $a, b, c, e$ son positivos, tendremos que las curvas de nivel

$$f_1(x) + f_2(y) = K$$

son cerradas. Más aún, el punto $P\left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right)$ será un punto fijo del sistema, ya que si inicialmente ponemos una condición inicial en ese punto, la derivada será nula, por lo que ese punto será denominado *punto crítico*.

Podemos notar que no hemos resuelto el sistema, es decir, no hemos obtenido $x(t)$ e $y(t)$, pero la información cualitativa que hemos obtenido nos permite determinar periodos, ciclos ecológicos, etc.




La figura muestra curvas de nivel para la función

$$F(x,y) = f_1(x) + f_2(y) = 0{,}6\,x - 0{,}8\,\ln(x) + 0{,}6\,y - 0{,}8\,\ln(y)$$

Los colores más claros indican mayores valores de $C$. Se puede apreciar que conforme $x$ e $y$ se acercan a $P\,(1{,}3333, 1{,}3333)$ la función se acerca al mínimo.

Esto indica que para estos valores particulares de $a, b, c, e$ nunca desaparecerán ni los predadores ni las presas.

## 4. Puntos Críticos. Estabilidad Lineal

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx^\ell}{dt} = f^\ell(\mathbf{x}), \qquad \ell = 1, 2, \ldots n$$

Luego analizaremos la particularidad de $n = 2$, pero por el momento se puede hacer la teoría general.

Consideremos un punto $\mathbf{x}_c$ tal que

$$f^\ell(\mathbf{x}_c) = 0, \qquad \ell = 1, 2, \ldots, n$$

podemos notar que si consideramos como condición inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_c$ el sistema evolucionará en el tiempo sin cambiar las cantidades $x^\ell$. Estos puntos se denominan *puntos críticos.*

Si las funciones son analíticas, o en el caso de funciones reales, diferenciables, podemos hacer un desarrollo de Taylor alrededor del punto $\mathbf{x}_c$

$$f^\ell(\mathbf{x}) = \underbrace{f^\ell(\mathbf{x}_c)}_{\text{es } 0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^\ell}{\partial x^j}(\mathbf{x}_c)\,(x^j - x^j_c) + \mathcal{O}(||\mathbf{x} - \mathbf{x}_c||^2)$$

Si queremos hacer un estudio local, en un entorno del punto crítico, tendremos

$$f^\ell(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^\ell}{\partial x^j}(\mathbf{x}_c)\,(x^j - x^j_c)$$

A partir de este análisis, consideremos las nuevas variables

$$\xi^{\ell} = x^{\ell} - x_c^{\ell}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\xi^{\ell}}{dt} = \frac{dx^{\ell}}{dt}$$

Con lo cual podemos obtener un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\xi^{\ell}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^{\ell}}{\partial x^j}(\mathbf{x}_c)\ \xi^j$$

que no es otra cosa que un sistema lineal.

Lo que es importante enfatizar es el hecho de que las variables $\xi^{\ell}$ miden la diferencia de la coordenada $\ell-$ésima de $\mathbf{x}$ respecto a la $\ell-$ésima coordenadas del punto crítico. Es por esta razón que estas ecuaciones se denominan *ecuaciones variacionales.*

Las ecuaciones variacionales -en este contexto- son las ecuaciones diferenciales que describen la posición relativa al punto crítico. Entonces, si $\xi = \mathbf{0}$ estamos en el punto crítico, no en el origen.

Las ecuaciones variacionales serán, entonces,

$$[\dot{\xi}] = [\mathbf{D}] \cdot [\xi]$$

Donde $D$ es la matriz Jacobiana de las funciones $f^{\ell}$, evaluadas en el punto crítico.

## 4.1. Exponentes Característicos. Análisis de Estabilidad Lineal

El estudio del sistema lineal

$$[\dot{\xi}] = [\mathbf{D}] \cdot [\xi]$$

ya se ha efectuado, debido a que es un sistema lineal y homogéneo.

La solución del sistema es

$$[\xi(t)] = e^{D(t-t_0)}\,[\xi_0]$$

En particular, si la matriz Jacobiana es diagonalizable, tendremos

$$[\xi(t)] = \mathbf{P}e^{\Lambda(t-t_0)}\,\mathbf{P}^{-1}[\xi_0]$$

donde $\Lambda$ es una matriz diagonal.

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot [\xi(t)] = e^{\Lambda(t-t_0)}\,\mathbf{P}^{-1} \cdot [\xi_0]$$

Llamando $[\eta] = \mathbf{P}^{-1} \cdot [\xi]$ tenemos

$$[\eta(t)] = e^{\Lambda(t-t_0)}\,[\eta_0]$$

O, para visualizar mejor,

$$\begin{array}{rcl} \eta^1(t) & = & \eta_0^1\, e^{\lambda_1(t-t_0)} \\ \eta^2(t) & = & \eta_0^2\, e^{\lambda_2(t-t_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta^n(t) & = & \eta_0^n\, e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{array}$$

La estabilidad está asociada al valor de los exponentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Si una coordenada $\eta^j$ tiene asociado un exponente $\lambda_j$ positivo, crecerá indefinidamente, por lo que conforme pasa el tiempo $t$, la coordenada se aleja de la coordenada $j-$ésima del punto crítico. Claramente, los $\lambda$'s positivos nos hablan de inestabilidad.

Los $\lambda_j$ negativos hacen que conforme pasa el tiempo, tendremos que $\lim_{t\to\infty} \eta^j(t) = 0$. Por lo que se acercará indefinidamente al punto crítico.

Si $\lambda_j$ es imaginario puro, habrá variaciones periódicas en la coordenada $j-$ésima.

### 4.1.1. Estabilidad Lineal en el Plano

Con el objeto de visualizar la estabilidad a partir de la linealización, analicemos el problema en el plano.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\
\frac{dy}{dt} &= g(x,y)
\end{aligned}
$$

Si $(x_c, y_c)$ es un punto crítico, es decir, que se cumple

$$f(x_c, y_c) = g(x_c, y_c) = 0$$

linealizamos y obtenemos, para las ecuaciones diferenciales variacionales

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_c, y_c)\,\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_c, y_c)\,\eta \\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_c, y_c)\,\xi + \frac{\partial g}{\partial y}(x_c, y_c)\,\eta
\end{aligned}
$$

Si asumimos que la matriz es diagonalizable, en la base de autovectores, tendremos que la solución del problema se puede escribir:

$$
\begin{aligned}
\xi'(t) &= \xi'_0\, e^{\lambda_1 t} \\
\eta'(t) &= \eta'_0\, e^{\lambda_2 t}
\end{aligned}
$$

Si el sistema es en el $\mathbb{R}^2$, los casos posibles son

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ambos positivos. El punto será inestable, ya que se aleja indefinidamente del punto crítico.
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ambos negativos. El punto será estable, ya que se acerca indefinidamente del punto crítico.
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ el punto se denomina punto silla, y es inestable.
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, con $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, es decir, complejos conjugados. En este caso, puede suceder:
  - $\lambda_1$ y $\lambda_2$ imaginarios puros, con lo que tenemos una oscilación alrededor del punto crítico.

- $\lambda_1$ y $\lambda_2$ con parte real iguales y positivas. En este caso se aleja de manera espiralada. Punto Inestable.
- $\lambda_1$ y $\lambda_2$ con parte real iguales y negativas. En este caso se acerca al punto crítico de manera espiralada. Punto Estable.

En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales que preservan medida (como los sistemas mecánicos conservativos), se debe cumplir

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Entonces, los únicos casos posibles son

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Punto Inestable. Punto Silla.
- $\lambda_1 = i\omega$ y $\lambda_2 = -i\,\omega$. Punto Estable. Centro.

# 5. Cíclos Límites

Otro caso de estabilidad son los conjuntos denominados *ciclos límites* o *atractores.*
Un ciclo límite será una curva a la cual tienden todas las curvas soluciones, independientemente de las condiciones iniciales.

**Ejemplo.** Analicemos el siguiente problema en el plano: Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x\,(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Expresado en coordenadas polares, el sistema toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} &= -1 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son, a saber

$$\begin{aligned} \rho(t) &= c\frac{e^t}{\sqrt{1 + c^2 e^{2t}}} \\ \theta(t) &= \theta_0 - t \end{aligned}$$

Podemos notar que la curva $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 1$. Esta curva es un <u>*ciclo límite*</u>, ya que independientemente de $c$ y $\theta_0$, todas las curvas tienden a $\rho = 1$ para $t \to \infty$.

## 5.1. El Oscilador de van der Pol

Un ejemplo de cíclo límite aparece en la teoría de circuitos en un trabajo del ingeniero holandés Balthasar van der Pol, el cual obtuvo que la corriente para un circuito triodo, el cual consta de un cátodo, un ánodo y un tercer elemento que es una rejilla que regula (amortigua) el flujo de electrones que fluyen desde el cátodo hacia el ánodo.

La ecuación que van der Pol obtuvo fue

$$\frac{d^2 I}{dt^2} - \mu\,(1 - I^2)\,\frac{dI}{dt} + I = 0$$

Llamando $x = I$ e $y = \dot{x} = \dot{I}$ tenemos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \mu\,(1 - x^2)\,y\end{aligned}$$

### 5.2. La Ecuación de Lorenz. Atractor Extraño

Uno de los ejemplos donde aparece la idea de sistema caótico es el denominado *ecuación de Lorenz*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(b - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - cz\end{aligned}$$

Si bien este sistema aparece en problemas de dinámica de la atmósfera, las ecuaciones de Lorenz aparecen en problemas de circuitos eléctricos, lásers, etc.

**Atractor Extraño.** Esta idea aparece debido a que el ciclo límite no es una curva, sino un conjunto denominado *fractal.*

## 6. Dependencia con Condiciones Iniciales. Estabilidad en el sentido de Liapunov

El concepto de estabilidad lo precisó el matemático ruso Alexandr Liapunov, el cual caracterizó a la estabilidad de un determinado sistema de ecuaciones diferenciales a partir de su comportamiento con las condiciones iniciales.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= f^1(\mathbf{x}) \\ \frac{dx^2}{dt} &= f^2(\mathbf{x}) \\ \vdots\;\; & \;\;\;\;\vdots \\ \frac{dx^n}{dt} &= f^n(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Para este sistema de ecuaciones diferenciales, consideremos dos problemas de Cauchy, uno con condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ y otro con condiciones iniciales $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Bajo las condiciones del Teorema de Cauchy, tendremos dos soluciones únicas:

$$\mathbf{x}(t), \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y}(t)$$

Liapunov caracterizó la estabilidad de un determinado sistema a partir del estudio de la evolución temporal de la función diferencia

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$$

**Definición. Estabilidad de Liapunov.** *Una solución del sistema*

$$\begin{aligned}
\frac{dx^1}{dt} &= f^1(\mathbf{x}) \\
\frac{dx^2}{dt} &= f^2(\mathbf{x}) \\
\vdots &\quad \vdots \\
\frac{dx^n}{dt} &= f^n(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

*se dice estable en el sentido de Liapunov si* $\forall \varepsilon > 0$ *existe un* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tales que*

$$||\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|| < \varepsilon, \quad \textit{siempre que} \quad ||\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|| < \delta$$

*para todo* $t > t_0$.
$\mathbf{y}(t)$ *es una solución del sistema con condición inicial* $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$

La elección de la norma es arbitraria y dependerá del problema bajo análisis.

Si el problema tiene un punto crítico $\mathbf{x}_c$ y desarrollamos las funciones hasta el primer orden tenemos que coincide con el análisis lineal de la estabilidad.

**Definición. Estabilidad Asintótica de Liapunov.** *bajo las condiciones de estabilidad de Liapunov, si además se cumple que*

$$\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|| = 0$$

*se dice que la solución* $\mathbf{x}(t)$ *es una solución asintóticamente estable.*
La definición de estabilidad asintótica también se aplica al caso en que una de las condiciones iniciales sea en un punto crítico.

# 7. Función de Liapunov

**Motivación. Necesidad.** Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -x^2 + 2xy^2 \\
\frac{dy}{dt} &= -2xy
\end{aligned}$$

Este sistema tiene al origen como un punto crítico, pero la linealización no es posible, ya las derivadas de las funciones del miembro de la derecha también son nulas en el origen.

En consecuencia, no será posible efectuar el estudio de estabilidad lineal, en un entorno del origen.

Para salvar esta situación, Liapunov halló los siguientes resultados:

**Teorema 1 (Liapunov) .** *Sea un sistema de ecuaciones diferenciales en* $\mathbb{R}^2$*, no lineales y autónomo con un punto crítico aislado en el origen* $(0,0)$*,*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y)\end{aligned}$$

*Sea* $V$ *una función diferenciable definida negativa en un entorno del punto crítico, para la cual se cumple que*

$$\frac{\partial V}{\partial x}F(x,y)+\frac{\partial V}{\partial y}G(x,y)$$

*es definida positiva sobre una región que contenga al origen. Entonces, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si* $V$ *es semidefinida negativa, el origen es un punto de equilibrio estable.*

Otro resultado enunciado por Liapunov es el siguiente teorema más general.

**Teorema 2 (Liapunov).** *Sea el origen un punto crítico aislado del sistema*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y)\end{aligned}$$

*Sea* $V$ *una función diferenciable en una región que contiene al origen.*
*Supóngase que* $V(0,0)=0$ *y que en toda vecindad del origen hay, al menos, un punto en el cual* $V$ *es positiva (o negativa). Entonces, si existe un dominio* $D$ *que contenga al origen, tal que la*

$$\frac{\partial V}{\partial x}F(x,y)+\frac{\partial V}{\partial y}G(x,y)$$

*es definida positiva (o negativa) el punto de equilibrio es inestable.*

La función $V(x,y)$ se llama *función de Liapunov.*

Los teoremas de Liapunov proveen condiciones suficientes. Nada en el teorema dice cómo se puede construir la función de Liapunov.

En términos prácticos, una función $V$ propuesta cuadrática,

$$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$

será definida positiva si

$$a>0, \qquad \text{y}, \qquad 4ac-b^2>0$$

y negativa si ambos son negativos.

En efecto, comenzando con la función

$$V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=a\left(x^2+\frac{b}{a}xy\right)+cy^2$$

completando cuadrados, tenemos,

$$V(x,y) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2\right] + cy^2$$

entonces,

$$V(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{1}{4a}(4ac - b^2)y^2$$

En términos generales, la propuesta de funciones de Liapunov puede proponerse como una función homogénea de grado 2, y ver si tal función existe.

**Ejemplo** (Boyce & Diprima, pág.525). Demostrar que el punto crítico $(0,0)$ del sistema autónomo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x - xy^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y - yx^2\end{aligned}$$

es asintóticamente estable.

Propongamos la función $V(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$. Entonces, calculando la función $\frac{\partial V}{\partial x}F(x,y)+\frac{\partial V}{\partial y}G(x,y)$ obtenemos

$$(2ax+by)(-x-xy^2)+(bx+2cy)(-y-yx^2) = -\left[2a(x^2+x^2yy^2)+b(2xy+xy^2+yx^2)+2c(y^2+x^2y^2)\right]$$

Si elegimos $a$ y $c$ positivos y $b=0$ tendremos que la función $V$ es definida positiva y

$$\frac{\partial V}{\partial x}F(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y}G(x,y)$$

definida negativa. Entonces, por el teorema 1, tendremos que el origen es un punto asintóticamente estable.

Es importante analizar que este análisis de estabilidad no es a partir del problema linealizado.

# 8. Bibliografía Recomendada


- Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer (1992)
- Boyce, William E.; Diprima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Ed. Limusa (1991)
- Moulton, Forest R. *Differential Equations*, Ed. Dover (1958)
- Goursat, E. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)
- Wiggings, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Ed. Springer (1990)