Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

Teorema de Existencia de Cauchy

Aspectos Algebraicos

1. Introducción

En este material vamos a considerar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, esto es, problemas de valor inicial de la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{1\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{2\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_2(t) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{n\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_n(t)
\end{aligned}
$$

con las condiciones iniciales $x_j(t_0) = x_{j0},\ (j = 1, 2, \ldots n)$.

Las funciones $a_{ij}(t)$ y las funciones $f_i(t)$ satisfacerán las condiciones para cada abordaje.

Comenzaremos inicialmente con un abordaje en el contexto del *Teorema de Cauchy*, esto es, suponiendo analiticidad de las funciones

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_{i\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_i(t)$$

en un determinado dominio.

2. Método de Cauchy. Funciones Analíticas

De manera análoga al caso general, el estudio de existencia de soluciones se basa en el Teorema de Cauchy, mediante el *Principio de la Mayorante*.

Como veremos, este caso la acotación es más sencilla, dada la dependencia lineal con las variables x. Llamemos para simplificar notación, llamando $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$g_i(\mathbf{x}; t) = \sum_{\ell=0}^{n} a_{i\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_i(t)$$

notemos que podemos escribir

$$g_i(\mathbf{x}; t) = \sum_{\ell=0}^{n} a_{i\ell}(t)\, (x_\ell - x_{\ell 0}) \,+\, \tilde{f}_i(t)$$

con

$$\tilde{f}_i(t) = \sum_{\ell=0}^{n} a_{i\ell}(t)\, x_{\ell 0} \,+\, f_i(t)$$

Consideremos las funciones $a_{i\ell}(t)$ y $f_i(t)$ analíticas en el dominio $\mathcal{D} : |t - t_0| < T'$, $(t \in \mathbb{C})$. Se ha elegido un único T', menor de todos los T'_i donde hay analiticidada de las $a_{i\ell}(t)$ y $f_i(t)$, respectivamente.

Sean

$$M_{ij} = \max_{\mathcal{D}} \{a_{ij}(t)\}, \qquad N_i = \max_{\mathcal{D}} \{f_i(t)\}$$

Entonces podemos construir las funciones mayorantes que dominen las $g_i(\mathbf{x}; t)$.

Dada la dependencia lineal con las variables x_ℓ el desarrollo de Taylor para las funciones $g_i(\mathbf{x}; t)$ se efectuarán sólo en la variable t, es decir, en potencias de $(t - t_0)$.

$$\begin{aligned} a_{ij}(t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_t} \frac{a_{ij}(t^*)}{(t^* - t_0)^{\ell+1}} dt^* \right] (t - t_0)^\ell \\ f_i(t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_t} \frac{f_i(t^*)}{(t^* - t_0)^{\ell+1}} dt^* \right] (t - t_0)^\ell \end{aligned}$$

Calculemos las integrales en las curvas $|t - t_0| = T'$ y además las podemos acotar:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_t} \frac{a_{ij}(t^*)}{(t^* - t_0)^{\ell+1}} dt^* \right| &\leq \frac{M_{ij}}{T^\ell} \\ \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_t} \frac{f_i(t^*)}{(t^* - t_0)^{\ell+1}} dt^* \right| &\leq \frac{N_i}{T^\ell} \end{aligned}$$

Si definimos $M = \max_{ij} \{M_{ij}, N_i, M_{ij} + x_{i0} N_i\}$ podemos decir que la función

$$G_i(\mathbf{x}; t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} M\,(x_\ell - x_{\ell 0}) \left[\frac{(t - t_0)}{T} \right]^\ell + M \left[\frac{(t - t_0)}{T} \right]^\ell$$

o, sumando las series (serie geométrica)

$$G_i(\mathbf{x}; t) = M \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(x_\ell - x_{\ell 0})}{[1 - \frac{t - t_0}{T}]} + M \frac{1}{[1 - \frac{t - t_0}{T}]}$$

$$G_i(\mathbf{x}; t) = \frac{M}{[1 - \frac{t - t_0}{T}]} \left[\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - x_{\ell 0}) + 1 \right]$$

Con estas funciones el sistema dominante será

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{M}{[1 - \frac{t - t_0}{T}]} \left[\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - x_{\ell 0}) + 1 \right] \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{M}{[1 - \frac{t - t_0}{T}]} \left[\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - x_{\ell 0}) + 1 \right] \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{M}{[1 - \frac{t - t_0}{T}]} \left[\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - x_{\ell 0}) + 1 \right] \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $x_j(t_0) = x_{j0},\ (j = 1, 2, \dots n)$.

Notemos que todas las variables cambian con la misma derivada, por lo que podemos definir

$$\xi = x_1 - x_{10} = x_2 - x_{20} = \cdots = x_n - x_{n0}$$

con lo que se puede representar con un único problema de valor inicial

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M\left[n\xi + 1\right]}{\left[1 - \frac{t-t_0}{T}\right]}, \qquad \xi(t_0) = 0$$

Esta ecuación es a variable separable, y de sencilla resolución.

En efecto,

$$\frac{1}{n\xi + 1} d\xi = \frac{M}{1 - \frac{t-t_0}{T}} dt$$

$$\frac{1}{n}\,\log(n\xi + 1) = -M\,T\,\log\left[1 - \frac{t - t_0}{T}\right]$$

Despejando,

$$\log(n\xi + 1) = \log\left[\left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right)^{-n\,M\,T}\right]$$

$$n\,\xi + 1 = \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right)^{-n\,M\,T}$$

$$\xi(t) = \frac{1}{n}\left[-1 + \left(1 - \frac{t - t_0}{T}\right)^{-n\,M\,T}\right]$$

Lo que significa que el límite de analiticidad para la solución es

$$|t - t_0| < T$$

Este abordaje es formal y con hipótesis fuertes: analiticidad. Sin embargo, el tratamiendo es necesario cuando las soluciones formales son buscadas a partir de series formales.

El dominio de analiticidad de la solución del problema auxiliar, coincide con el de analiticidad de las funciones del problema de valor inicial dado. Por lo que será una cota para el dominio de analiticidad de las funciones solución.

Ya hemos visto para el caso general que la hipótesis de analiticidad puede suplantarse por la *condición de Lipschitz* la cual es mucho menos restrictiva y resolver el problema -al menos formalmente- con el procedimiento propuesto por Picard, o más generalmente, por Picard-Lindelöf.

En lo que sigue vamos a analizar aspectos algebraicos las de las soluciones generales de los sistemas lineales. Analizaremos el caso homogéneo como así también el inhomogéneo.

3. Aspectos Algebraicos de los Sistemas de EDO Lineales

Consideremos un sistema lineal en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{1\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{2\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_2(t) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{n\ell}(t)\, x_\ell \,+\, f_n(t)
\end{aligned}$$

En el caso de analizarlo en el marco de Picard-Lindelöf, con la continuidad de las funciones $a_{ij}(t)$ es suficiente para que satisfaga la condición de Lipschitz.

Si asumimos que las funciones incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman un vector en $\mathbb{R}^n$, estas funciones serán las componentes de dicho vector. O, lo que es equivalente, las coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

El sistema de ecuaciones diferenciales también puede escribirse como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A_t(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(t)$$

donde A_t es un operador lineal sobre $\mathbb{R}^n$. Esta expresión es independiente del sistema de coordenadas, o lo que es equivalente, de la base elegida para $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Vamos a representar un vector de $\mathbb{R}^n$ como

$$\mathbf{x} = \sum_{\mu=1}^{n} x^\mu \mathbf{e}_\mu \underbrace{=}_{Einstein} x^\mu \mathbf{e}_\mu$$

Entonces, llamando a^μ_ν los elementos de la matriz asociada del operador en la base elegida, tendremos

$$\frac{dx^\mu}{dt} = a^\mu_\nu(t)\, x^\nu \qquad \text{(usando la convención de Einstein)}$$

O, en términos matriciales,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_1(t) & a^1_2(t) & \cdots & a^1_n(t) \\ a^2_1(t) & a^2_2(t) & \cdots & a^2_n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^n_1(t) & a^n_2(t) & \cdots & a^n_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \vdots \\ f^n(t) \end{bmatrix}$$

3.1. Caso Homogéneo. Matriz Fundamental

Consideremos el problema homogéneo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A_t(\mathbf{x})$$

o, en coordenadas,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_1(t) & a^1_2(t) & \cdots & a^1_n(t) \\ a^2_1(t) & a^2_2(t) & \cdots & a^2_n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^n_1(t) & a^n_2(t) & \cdots & a^n_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

Para el caso de problema de valor inicial, $x^\mu(t_0) = x^\mu_0$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$.

3.1.1. Dimensión del Espacio de Soluciones

Para el problema homogéneo, vamos a probar que la dimensión del espacio (visto como transformación lineal, el núcleo del operador) tiene dimensión n.

En efecto, consideremos los n problemas de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}^1_\ell \\ \dot{u}^2_\ell \\ \vdots \\ \dot{u}^n_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_1(t) & a^1_2(t) & \cdots & a^1_n(t) \\ a^2_1(t) & a^2_2(t) & \cdots & a^2_n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^n_1(t) & a^n_2(t) & \cdots & a^n_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1_\ell \\ u^2_\ell \\ \vdots \\ u^n_\ell \end{bmatrix}$$

Para el caso de problema de valor inicial,

$$u^\mu_\ell(t_0) = \delta^\mu_\ell = \begin{cases} 1 & \mu = \ell \\ 0 & \mu \neq \ell \end{cases},$$

$\mu, \ell = 1, 2, \ldots, n$.

Para verlo en términos de operador lineal

$$(D - A_t)(\mathbf{u}_\ell) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}_\ell(t_0) = \mathbf{e}_\ell$$

El operador D es el de la derivación (derivar componente a componente).

Los n problemas de valor inicial, cuyos valores en $t = t_0$ son los propios vectores base, nos permite considerar que, al menos en el valor inicial, el problema original puede escribirse

$$\mathbf{x}(t_0) = \alpha^\mu \, \mathbf{e}_\mu \; = \; \alpha^\mu \mathbf{u}_\mu(t_0)$$

Consideremos el vector

$$\mathbf{x}(t) \; = \; \alpha^\mu \mathbf{u}_\mu(t)$$

Este vector satisface la ecuación homogénea y la condición inicial, debido a que

$$(D - A_t)(\mathbf{x}) = (D - A_t)(\, \alpha^\mu \mathbf{u}_\mu) = \alpha^\mu (D - A_t)(\mathbf{u}_\mu) = \mathbf{0}$$

Entonces, podemos decir que el conjunto

$$\{\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)\}$$

genera el núcleo. O lo que es equivalente, genera el subespacio de soluciones de la ecuación homogénea.

Para analizar la independencia lineal, consideremos la combinación lineal

$$\beta^\mu \, \mathbf{u}_\mu(t) = \mathbf{0}$$

Como en la condición inicial es también nula y además tenemos

$$\beta^\mu \, \mathbf{u}_\mu(t_0) = \beta^\mu \, \mathbf{e}_\mu = \mathbf{0}$$

y los vectores base de $\mathbb{R}^n$ son LI, tendremos que $\beta^\mu = 0$, para $\mu = 1, 2, \ldots, n$.

3.2. Matriz Fundamental. Propagador Temporal

Con el resultado anterior, podemos asumir que la solución general del problema homogéneo será combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)$; ya que hemos comprobado que son base del espacio de soluciones del problema homogéneo. Entonces, podremos escribir, si $\mathbf{x}$ es solución general del problema homogéneo,

$$\mathbf{x} = \alpha^\mu \mathbf{u}_\mu(t) = \alpha^1 \mathbf{u}_1(t) + \alpha^2 \mathbf{u}_2(t) + \cdots + \alpha^n \mathbf{u}_n(t)$$

Expresemos la solución general en coordenadas.

$$x^\nu \, \mathbf{e}_\nu = \alpha^\mu u^\nu_\mu(t) \, \mathbf{e}_\nu \qquad \text{(convención de Einstein)}$$

igualando coordenadas, tenemos,

$$x^\nu \; = \; \alpha^\mu u^\nu_\mu(t)$$

Esta ecuación puede representarse como un producto de matrices,

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1_1(t) & u^1_2(t) & \cdots & u^1_n(t) \\ u^2_1(t) & u^2_2(t) & \cdots & u^2_n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u^n_1(t) & u^n_2(t) & \cdots & u^n_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{bmatrix}$$

Podemos notar que la matriz

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u^1_1(t) & u^1_2(t) & \cdots & u^1_n(t) \\ u^2_1(t) & u^2_2(t) & \cdots & u^2_n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u^n_1(t) & u^n_2(t) & \cdots & u^n_n(t) \end{bmatrix}$$

está compuesta por los vectores base del núcleo (o por el conjunto base de las soluciones de la ecuación homogénea con condiciones iniciales coincidentes con los vectores base de $\mathbb{R}^n$) encolumnados. Recordemos que en los vectores $\mathbf{u}_\ell(t)$ los subíndices indican el vector base y los supraíndices, las coordenadas.

Esta matriz se la denomina *matriz fundamental*.

Consideremos además la condición inicial, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Si aplicamos la relación para la solución general en coordenadas, tendremos,

$$\begin{bmatrix} x^1_0 \\ x^2_0 \\ \vdots \\ x^n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1_1(t_0) & u^1_2(t_0) & \cdots & u^1_n(t_0) \\ u^2_1(t_0) & u^2_2(t_0) & \cdots & u^2_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u^n_1(t_0) & u^n_2(t_0) & \cdots & u^n_n(t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{bmatrix}$$

las constantes α^μ no dependen de t.

Como los vectores $\mathbf{u}_\mu$ son linealmente independientes para todo t (en el intervalo de definición del PVI) tendremos que la matriz fundamental posee inversa. Además, podemos despejar los *alpha*$^\nu$

$$\begin{bmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1^1(t_0) & u_2^1(t_0) & \cdots & u_n^1(t_0)\\ u_1^2(t_0) & u_2^2(t_0) & \cdots & u_n^2(t_0)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ u_1^n(t_0) & u_2^n(t_0) & \cdots & u_n^n(t_0)\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}x_0^1\\ x_0^2\\ \vdots\\ x_0^n\end{bmatrix}$$

Entonces, reemplazando en la solución a tiempo t, obtenemos

$$\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1^1(t) & u_2^1(t) & \cdots & u_n^1(t)\\ u_1^2(t) & u_2^2(t) & \cdots & u_n^2(t)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ u_1^n(t) & u_2^n(t) & \cdots & u_n^n(t)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}u_1^1(t_0) & u_2^1(t_0) & \cdots & u_n^1(t_0)\\ u_1^2(t_0) & u_2^2(t_0) & \cdots & u_n^2(t_0)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ u_1^n(t_0) & u_2^n(t_0) & \cdots & u_n^n(t_0)\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}x_0^1\\ x_0^2\\ \vdots\\ x_0^n\end{bmatrix}$$

Llamando

$$\mathbf{\Psi}(t,t_0) = \begin{bmatrix}u_1^1(t) & u_2^1(t) & \cdots & u_n^1(t)\\ u_1^2(t) & u_2^2(t) & \cdots & u_n^2(t)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ u_1^n(t) & u_2^n(t) & \cdots & u_n^n(t)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}u_1^1(t_0) & u_2^1(t_0) & \cdots & u_n^1(t_0)\\ u_1^2(t_0) & u_2^2(t_0) & \cdots & u_n^2(t_0)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ u_1^n(t_0) & u_2^n(t_0) & \cdots & u_n^n(t_0)\end{bmatrix}^{-1}$$

Podemos escribir

$$\begin{bmatrix}x^1(t)\\ x^2(t)\\ \vdots\\ x^n(t)\end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}(t,t_0) \cdot \begin{bmatrix}x_0^1\\ x_0^2\\ \vdots\\ x_0^n\end{bmatrix}$$

lo que significa que la matriz $\mathbf{\Psi}(t,t_0)$ toma el vector en el instante inicial t_0 y lo transforma en el vector en el instante t.

Esta matriz, o el operador asociado, es denominado *Propagador Temporal*. En efecto, la operación asociada al propagador es tomar el valor inicial y transportarlo al tiempo t.

El propagador satisface las siguientes propiedades:

- $\mathbf{\Psi}(t_0,t_0) = \mathbf{I}_{n\times n}$
- $\mathbf{\Psi}(t_2,t_1) \cdot \mathbf{\Psi}(t_1,t_0) = \mathbf{\Psi}(t_2,t_0)$
- $\mathbf{\Psi}(-t_1,t_1) = [\mathbf{\Psi}(t_1,t_0)]^{-1}$

Con estas propiedades, podemos considerar al propagador como un elemento de un *grupo*. En el contexto de la mecánica clásica -más precisamente, de los sistemas dinámicos- este *grupo* es denominado *grupo uno-paramétrico de difeomorfismos* y representa la evolución temporal del sistema.

Antes de abordar el problema de la construcción del propagador temporal, revisemos algunos resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

3.3. EDO de Segundo Orden

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea

$$\ddot{x}(t) + a(t)\,\dot{x}(t) \ + b(t)\,x(t) = 0$$

como se ha visto, la solución general venía dada de la forma:

$$x(t) = c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t)$$

es decir, asumíamos -a partir de un análisis lineal- que el espacio solución tenía dimensión 2.

Si llamamos $y(t) = \dot{x}(t)$ tenemos un sistema de segundo orden, lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -b(t)\,x - a(t)\,y \end{aligned}$$

Si asumimos que las variables x e y son las coordenadas en base canónica para $\mathbb{R}^2$, podemos escribir matricialmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

El espacio de soluciones para este sistema de primer orden, 2×2, será bidimensional.

En general, una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden k y homogénea tendrá un espacio de soluciones k-dimensional.

Consideremos la EDO de segundo orden lineal y homogénea, con coeficientes constantes,

$$\ddot{x}(t) + a\,\dot{x}(t) \ + b\,x(t) = 0$$

podemos construir el sistema de primer orden, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Supongamos que la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$ es diagonalizable, con autovalores λ_1 y λ_2. Entonces, si la matriz de cambio de base es $\mathbf{P}$ tendremos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \left(\mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

Si llamamos

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \left(\mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

podemos reescribir el sistema, de manera más sencilla:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Lo interesante de haber diagonalizado es que se desacoplaron las ecuaciones, tendremos:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda_1 \, \xi \\ \dot{\eta} &= \lambda_2 \, \eta \end{aligned}$$

cuyas soluciones son, trivialmente,

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 \, e^{\lambda_1 \, t} \\ \eta(t) &= \eta_0 \, e^{\lambda_2 \, t} \end{aligned}$$

Lo de soluciones exponenciales ya fue un resultado obtenido en el análisis introductorio a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Veamos cómo obtenemos los autovalores.

La matriz original es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

Por lo que la ecuación característica es

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$$

Esta ecuación es la misma que obtuvimos proponiendo una solución exponencial en la ecuación original:

$$\ddot{x}(t) + a(t)\,\dot{x}(t) \; + b(t)\,x(t) = 0$$

proponiendo (ansatz) una solución exponencial $x(t) = e^{\lambda\,t}$ y reemplazando

$$(\lambda^2 + a\,\lambda + b)\,e^{\lambda\,t} = 0$$

con lo cual, obteníamos que los exponentes característicos se obtenían a partir de resolver la ecuación

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$$

La resolución de un sistema lineal homogéneo de tamaño $n \times n$ de primer orden o, equivalentemente, una ecuación diferencial lineal de orden n se reduce por lo tanto a un problemas de autovalores.

El caso en el cual la propuesta exponencial daba como resultado una raíz doble en λ la búsqueda de la segunda solución nos arrojaba como solución $t\,e^{\lambda\,t}$. Este problema, visto como un problema de autovalores, tendrá como correlato la *forma de Jordan* para la matriz de coeficientes.

Continuaremos nuestro estudio con la búsqueda formal de la *matriz fundamental* y del propagador, tanto para el caso de coeficientes constantes como variables.

4. Aplicación del Método de Picard para la obtención de la Matriz Fundamental

Consideremos el caso del sistema homogéneo con coeficientes constantes,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para simplificar la notación, escribamos el sistema, en coordenadas

$$[\dot{\mathbf{x}}] = \mathbf{A}\,[\mathbf{x}]$$

Consideremos, además, la condición inicial, $[\mathbf{x}(t_0)] = [\mathbf{x}_0]$

Integrando a ambos miembros de las ecuaciones entre t_0 y t, tenemos (siempre trabajando en coordenadas):

$$\int_{t_0}^{t} [\dot{\mathbf{x}}] dt^* = \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}]\,dt^*$$

o, equivalentemente,

$$[\mathbf{x}(t)] - [\mathbf{x}_0] = \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}]\,dt^*$$

$$[\mathbf{x}(t)] = [\mathbf{x}_0] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}]\,dt^*$$

Definamos la iteración:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}^{(0)}(t)] &= [\mathbf{x}_0] \\
[\mathbf{x}^{(1)}(t)] &= [\mathbf{x}_0] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}^{(0)}]\,dt^* \\
[\mathbf{x}^{(2)}(t)] &= [\mathbf{x}_0] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}^{(1)}]\,dt^* \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
[\mathbf{x}^{(k+1)}(t)] &= [\mathbf{x}_0] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}^{(k)}]\,dt^* \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Si comenzamos a iterar, obtenemos:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}^{(1)}(t)] &= [\mathbf{x}_0] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}^{(0)}]\,dt^* = [\mathbf{x}_0] + \mathbf{A}\,[\mathbf{x}^{(0)}](t-t_0) = \{\mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0)\}\,[\mathbf{x}_0] \\
[\mathbf{x}^{(2)}(t)] &= [\mathbf{x}_0] + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,[\mathbf{x}^{(1)}]\,dt^* = [\mathbf{x}_0] + \mathbf{A}\,[\mathbf{x}_0](t-t_0) + \mathbf{A}^2\,[\mathbf{x}_0]\frac{(t-t_0)^2}{2} \\
[\mathbf{x}^{(3)}(t)] &= [\mathbf{x}_0] + \mathbf{A}\,[\mathbf{x}_0](t-t_0) + \mathbf{A}^2\,[\mathbf{x}_0]\frac{(t-t_0)^2}{2} + \mathbf{A}^2\,[\mathbf{x}_0]\frac{(t-t_0)^3}{3!}
\end{aligned}$$

Siguiendo la iteración, obtenemos:

$$[\mathbf{x}^{(k)}(t)] = \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{[\mathbf{A}(t-t_0)]^2}{2!} + \frac{[\mathbf{A}(t-t_0)]^3}{3!} + \cdots + \frac{[\mathbf{A}(t-t_0)]^k}{k!} \right\} [\mathbf{x}_0]$$

Tomando límite al infinito, tenemos

$$[\mathbf{x}(t)] = \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}(t-t_0)]^\ell}{\ell!} \right\} [\mathbf{x}_0]$$

Lo que formalmente lo podemos escribir como

$$[\mathbf{x}(t)] = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}[\mathbf{x}_0]$$

Lo que significa, formalmente, que el propagador temporal es

$$\mathbf{\Psi}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

4.1. Caso Diagonalizable

Consideremos una matriz diagonalizable, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, existe una matriz invertible, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal.

Podemos notar que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \underbrace{\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{P}^{-1} \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^3 \cdot \mathbf{P}^{-1} \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{A}^k &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{P}^{-1}
\end{aligned}$$

Entonces, si la matriz es diagonalizable, la exponencial se puede escribir:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \cdot e^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

Ahora, siendo $\mathbf{D}$ una matriz diagonal, la exponencial (sumando la serie) queda,

$$e^{\mathbf{D}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{D}]^\ell}{\ell!} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda_1{}^\ell}{\ell!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda_2{}^\ell}{\ell!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda_n{}^\ell}{\ell!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Con este resultado, tendremos que para el caso diagonalizable,

$$[\mathbf{x}(t)] = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}[\mathbf{x}_0]$$

Entonces, para el caso diagonalizable, tenemos que el propagador temporal

$$\mathbf{\Psi}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

Tenemos, entonces,

$$[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{P}\cdot\begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}\cdot\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{x}_0]$$

entonces,

$$\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{x}(t)] = \cdot\begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}\cdot\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{x}_0]$$

Si llamamos

$$[\xi(t)] = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{x}(t)]$$

La solución será, para el caso diagonalizable

$$[\xi(t)] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}\cdot[\xi_0]$$

o, en coordenadas,

$$\begin{aligned} \xi^1(t) &= \xi_0^1\, e^{\lambda_1(t-t_0)} \\ \xi^2(t) &= \xi_0^2\, e^{\lambda_2(t-t_0)} \\ \vdots\;\; & \;\;\vdots \\ \xi^n(t) &= \xi_0^n\, e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{aligned}$$

4.2. Caso No Diagonalizable

La solución del problema de valor inicial

$$[\dot{\mathbf{x}}] = \mathbf{A}\,[\mathbf{x}]$$

$$\mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = [\mathbf{x}_0]$$

Tiene por solución formal

$$[\mathbf{x}(t)] = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}[\mathbf{x}(t_0)]$$

En el caso en que la matriz $\mathbf{A}$ no fuera diagonalizable, podrá expresarse mediante una matriz de bloques de Jordan.

Entonces,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \mathbf{J}_m \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{J}_k = \lambda_k\mathbf{I}_{n_k\times n_k} + \mathbf{N}_{n_k\times n_k}$$

La matriz $\mathbf{I}_{n_k\times n_k}$ es la identidad y la matriz $\mathbf{N}_{n_k\times n_k}$ es nilpotente:

$$(\mathbf{N}_{n_k\times n_k})^{n_k} = \mathbf{0}$$

Entonces, el propagador temporal se escribirá:

$$\mathbf{\Psi}(t,t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{P}\cdot\begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{J}_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & e^{\mathbf{J}_m(t-t_0)} \end{bmatrix}\cdot\mathbf{P}^{-1}$$

Calculemos cada bloque.

$$e^{\mathbf{J}_k} = e^{\lambda_k \mathbf{I}_{n_k\times n_k} + \mathbf{N}_{n_k\times n_k}}$$

Además, como

$$\mathbf{I}_{n_k\times n_k}\cdot\mathbf{N}_{n_k\times n_k} = \mathbf{N}_{n_k\times n_k}\cdot\mathbf{I}_{n_k\times n_k}$$

podemos escribir:

$$e^{\mathbf{J}_k} = e^{\lambda_k \mathbf{I}_{n_k\times n_k}}\cdot e^{\mathbf{N}_{n_k\times n_k}}$$

la primer exponencial ya la hemos calculado antes, y la segunda es una serie de Taylor, pero que no será infinita debido a la nilpotencia.

$$e^{\mathbf{J}_k} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_k} \end{bmatrix}\cdot\left\{\mathbf{I}_{n_k\times n_k} + \mathbf{N}_{n_k\times n_k} + \frac{1}{2!}(\mathbf{N}_{n_k\times n_k})^2 + \cdots + \frac{1}{(n_k-1)!}(\mathbf{N}_{n_k\times n_k})^{n_k-1}\right\}$$

y lo propio para $e^{\mathbf{J}_k(t-t_0)}$.

EDO de segundo orden con coeficientes constantes.

Volviendo al problema

$$\ddot{x}(t) + a\,\dot{x}(t) + b\,x(t) = 0$$

llamando $y = \dot{x}$, podemos construir el sistema de primer orden, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

El polinomio característico se escribirá

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\,\lambda + b$$

En el caso de que tenga a λ_1 como raíz doble, se podrá escribir

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$$

En este caso tendremos, entonces, que la matriz del sistema se podrá escribir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} = \mathbf{P}\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{P}^{-1}$$

entonces, volviendo al sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\cdot\left\{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O, equivalentemente,

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

llamando

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

El propagador temporal

$$\Psi(t, t_0) = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 (t-t_0) & 0 \\ 0 & \lambda_1 (t-t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (t-t_0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

expandiendo la exponencial,

$$\Psi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 (t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 (t-t_0)} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (t-t_0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Psi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 (t-t_0)} & (t-t_0) e^{\lambda_1 (t-t_0)} \\ 0 & e^{\lambda_1 (t-t_0)} \end{bmatrix}$$

Lo que implica que la solución general, en la coordenada x se podrá escribir (agrupando constantes y teniendo en cuenta que el cambio a base de autovectores no es otra cosa que combinación lineal de coordenadas)

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \, t \, e^{\lambda_1 t}$$

como habíamos obtenido para el caso tratado originalmente en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y homogéneas.

5. El Problema No Homogéneo

Consideremos el problema no homogéneo, en coordenadas,

$$[\dot{x}] = \mathbf{A} \cdot [x] + [F]$$

recordemos que

$$[x] = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \qquad [\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{bmatrix}, \qquad [F] = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{bmatrix}.$$

Para resolver este problema vamos a aplicar el *método de variación de los parámetros* el cual consiste en el aprovechamiento de la solución de la ecuación homogénea, para la resolución de la no homogénea.

La solución general de la homogénea se escribía, en coordenadas,

$$[x(t)] = \mathbf{U}(t) \cdot [\alpha]$$

donde $\mathbf{U}(t)$ es la matriz fundamental.

Busquemos una solución particular de la forma:

$$[x(t)]_p = \mathbf{U}(t) \cdot [\alpha(t)]$$

Entonces, derivando con respecto a t, tenemos,

$$[\dot{x}]_p = \dot{\mathbf{U}}(t) \cdot [\alpha(t)] + \mathbf{U}(t) \cdot [\dot{\alpha}(t)] = \mathbf{A} \cdot [x] + [F]$$

Pero de la solución de la homogénea tenemos

$$\dot{\mathbf{U}}(t) \cdot [\alpha(t)] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}(t) \cdot [\alpha(t)]$$

entonces, la ecuación se reduce

$$\mathbf{U}(t) \cdot [\dot{\alpha}(t)] = [F]$$

Con lo cual, aprovechando que $\mathbf{U}$ es no singular,

$$[\dot{\alpha}(t)] = \mathbf{U}^{-1}(t) \cdot [F]$$

Entonces, para $[\alpha(t)]$ sólo debemos integrar en t

$$[\alpha(t)] = \int^t \mathbf{U}^{-1}(t^*) \cdot [F(t^*)]\, dt^*$$

Entonces, la solución particular será

$$[x(t)]_p = \mathbf{U}(t) \cdot [\alpha(t)] = \mathbf{U}(t) \cdot \left\{ \int^t \mathbf{U}^{-1}(t^*) \cdot [F(t^*)]\, dt^* \right\}$$

O, dado que la integración no se efectúa en t,

$$[x(t)]_p = \int^t \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(t^*) \cdot [F(t^*)]\, dt^*$$

ahora, recordemos que el propagador era

$$\mathbf{\Psi}(t, t_0) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(t_0)$$

Entonces,

$$[x(t)]_p = \int^t \mathbf{\Psi}(t, t^*) \cdot [F(t^*)]\, dt^*$$

6. Evolución temporal de conjuntos

Una aplicación interesante de sistemas de ecuaciones diferenciales en general, y de las lineales en particular, es el estudio de los denominados *Integrales Invariantes*.

Consideremos el espacio de todas las condiciones iniciales para el problema lineal y homogéneo. Lógicamente, si el sistema está en $\mathbb{R}^n$, el espacio de las condiciones iniciales también será $\mathbb{R}^n$.

Sea Ω_0 una región cerrada en el espacio de condiciones iniciales. Su volumen, será:

$$Vol(t_0) = \int\int\cdots\int_{\Omega_0} dx_0^1\, dx_0^2 \ldots dx_0^n$$

Sea Ω la evolución a tiempo t de la región Ω_0. Su volumen, será:

$$Vol(t) = \int\int\cdots\int_{\Omega} dx^1\, dx^2 \ldots dx^n$$

Ahora, debido a la relación lineal entre la evolución temporal y a las condiciones iniciales, tendremos que -habiendo elegido la base de autovectores-

$$\int\int\cdots\int_{\Omega} dx^1\, dx^2 \ldots dx^n = \int\int\cdots\int_{\Omega_0} e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(t-t_0)} dx_0^1\, dx_0^2 \ldots dx_0^n$$

(calcular el Jacobiano de la transformación).

Entonces, si la suma de todos los autovalores es nula, el volumen se conserva. Este resultado es de gran utilidad en Mecánica Hamiltoniana, donde una característica de las transformaciones canónicas y de la evolución temporal es la conservación del volumen en el espacio de las fases. Esto indica que en problemas conservativos no puede haber ni fuentes ni sumideros. O, lo que es lo mismo, los exponentes característicos en la mecánica clásica deben ser de suma cero.

7. Bibliografía Recomendada

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Miloni, O. *Notas de Algebra Lineal. Apuntes de Clase* (2015)
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones Diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014) http://sedici.unlp.edu.ar (en esta página buscar por autor)
- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Moulton, Forest R. *Differential Equations*, Ed. Dover (1958)
- Goursat, E. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)
- Forsyth, Andrew R. *Theory of Differential Equations*, Vol. II, Parte II Ed. Cambridge Academic Press (1900)
- Ince, E. L. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Dover (1952)