Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

V

Funciones Especiales

Octavio Miloni

1 Introducción

En este capítulo vamos a estudiar algunos aspectos de las denominadas *funciones especiales.* Típicamente, por funciones especiales vamos a considerar soluciones de ecuaciones diferenciales que por su aplicación y aparición en problemas de la física matemáticas fueron particularmente interesantes, motivo por el cual, tanto a las ecuaciones como a las soluciones son conocidas por el nombre de quien las descubrieron y estudiaron con profundidad.

Entre las funciones especiales más conocidas se encuentran las *funciones de Bessel, los polinomios de Legendre, los polinomios de Laguerre, los polinomios de Hermite, las funciones asociadas de Legendre, los polinomios de Chebyshev*, etc.

En muchos textos cada ecuación es estudiada de manera particular. Sin embargo, aprovechando lo que hemos visto de la ecuación de Riemann-Papperitz y la función hipergeométrica vamos a estudiar estas funciones a través de transformaciones contíguas de funciones hipergeométricas.

2 Relaciones Contiguas de las Funciones Hipergeométricas

A partir de la función hipergeométrica, vamos a estudiar las transformaciones denominadas contiguas y ellas son las definidas a través de

$$
{}_2F(a\pm 1,b;c;z), \qquad {}_2F(a,b\pm 1;c;z), \qquad {}_2F(a,;c\pm 1;z)
$$

Veamos que relación podemos obtener con ${}_2F(a-1,b;c;z)$ y ${}_2F(a+1,b;c;z)$ Por un lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
{}_2F(a+1,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+1+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)}\frac{z^\ell}{\ell!} \\
&= \frac{\Gamma(c)}{(a+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{\ell=0}^{\infty}(a+1+\ell)\frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)}\frac{z^\ell}{\ell!} \\
&= \frac{\Gamma(c)}{(a+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}(a+1)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)}\frac{z^\ell}{\ell!}+ \\
&+ \frac{\Gamma(c)}{(a+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\ell\,\frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)}\frac{z^\ell}{\ell!}
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
{}_2F(a+1,b;c;z) = {}_2F(a,b;c;z)+\frac{\Gamma(c)}{(a+1)\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\ell\,\frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)}\frac{z^\ell}{\ell!}
$$

De manera análoga, podemos obtener

$$
{}_2F(a-1,b;c;z) = \frac{a\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(a+\ell)}\frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)}\frac{z^\ell}{\ell!}
$$

Con estas dos expresiones podemos llegar mediante cálculo directo a la *relación contigua*

$$
(c-a)\,{}_2F(a-1,b;c;z)+[2a-c-(a-b)z]{}_2F(a,b;c;z)+a(z-1){}_2F(a+1,b;c;z)=0
$$

Dado que la definición de la función hipergeométrica establece una simetría entre a y b (son intercambiables, ${}_2F(a,b;c;z) = {}_2F(b,a;c;z)$) tenemos otra relación contigua por simple intercambio entre a y b

$$(c-b)\,{}_2F(a,b-1;c;z) + [2b-c-(b-a)z]{}_2F(a,b;c;z) + b(z-1){}_2F(a,b+1;c;z) = 0$$

Existen muchas y variadas relaciones contiguas, pero vamos a seleccionar las que nos permitan relacionarlas con las funciones especiales.

3 Ecuación de Jacobi. Polinomios de Jacobi

Cuando estudiamos las funciones hipergeométricas notamos que si a o b es un entero negativo por ejemplo $-n$ (con n natural) la serie queda truncada y resulta un polinomio de grado n.

Consideremos entonces la ecuación hipergeométrica con las siguientes particularidades: $a = -n$, $b = n+\alpha+\beta+1$ y $c = \alpha+1$ Aquí, α y β nada tienen que ver los exponentes característicos de la ecuación de Riemann-Papperitz.

La ecuación queda modificada

$$z(1-z)y''(z) + [1+\alpha-(\alpha+\beta+2)z]y'(z) + n(n+\alpha+\beta+1)y(z) = 0$$

Ahora, cambiemos la variable $z = \frac{1-x}{2}$, obtenemos la denominada *ecuación de Jacobi*

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(x) + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}y(x) + n(n+\alpha+\beta+1)y(x) = 0$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada α y β la solución de esta ecuación que satisfaga la condición

$$P_n^{\alpha\,\beta}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}$$

son los denominados Polinomios de Jacobi. Con esta condición, la relación entre los polinomios de Jacobi y la función hipergeométrica asociada será

$$P_n^{\alpha\,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}{}_2F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right)$$

3.1 Relación de Recurrencia

Dada la relación entre los polinomios de Jacobi y las función hipergeométrica, podemos aplicar las relaciones contiguas para establecer relaciones entre polinomios de Jacobi de distintos grados, que luego serán de utilidad para los casos particulares que nos serán de interés.

A partir de la relaciones contiguas

$$(c-a)\,{}_2F(a-1,b;c;z) + [2a-c-(a-b)z]{}_2F(a,b;c;z) + a(z-1){}_2F(a+1,b;c;z) = 0$$

y

$$(c-b)\,{}_2F(a,b-1;c;z) + [2b-c-(b-a)z]{}_2F(a,b;c;z) + b(z-1){}_2F(a,b+1;c;z) = 0$$

y teniendo en cuenta que

$$P_{n+1}^{\alpha\,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{\Gamma(\alpha+1)(n+1)!}{}_2F\left(-n+1, n+\alpha+\beta+2; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right)$$

y

$$P_{n-1}^{\alpha\,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+1)(n-1)!}\,{}_2F\left(-n-1, n+\alpha+\beta; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right)$$

podemos establecer la relación entre los polinomios

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta+2n+1)[\alpha^2-\beta^2+(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)x]P_n^{\alpha\,\beta}(x) = \\
= \;& 2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)P_{n+1}^{\alpha\,\beta}(x) + 2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)P_{n-1}^{\alpha\,\beta}(x)
\end{aligned}$$

Existen otras relaciones de recurrencia, que vinculan diferentes valores de α y β, las cuales pueden también ser obtenidas a partir de las relaciones contiguas, pero para nuestro propósito no serán desarrolladas aquí, sino que formarán parte de las ejercitaciones.

3.2 Función Generatriz

Los polinomios de Jacobi admiten como *función generatriz* a

$$g(x,t) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\mathbf{R}}\,[1-t+\mathbf{R}]^{-\alpha}\,[1+t+\mathbf{R}]^{-\beta}$$

donde

$$\mathbf{R} = \sqrt{1-2xt+t^2}$$

de manera tal de que al desarrollar $g(x,t)$ en potencias de t,

$$g(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell^{\alpha\,\beta}(x)\,t^\ell$$

desarrollo válido para $|t| < 1$

3.3 Fórmula de Rodrigues

Además de la función generatriz, los polinomios de Jacobi pueden calcularse directamente a partir de una relación denominada *fórmula de Rodrigues* la cual viene dada a partir de la expresión

$$P_n^{\alpha\,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\,n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$

A modo de ejemplo, podemos calcular el polinomio $P_1^{\alpha\,\beta}(x)$, como

$$P_1^{\alpha\,\beta}(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}]$$

Entonces,

$$P_1^{\alpha\,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+1)(1+x) - (\beta+1)\frac{1}{2}(1-x)$$

$$P_1^{\alpha\,\beta}(x) = \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta+2}{2}\,x$$

En particular, si α y β son nulos, tenemos

$$P_1^{0\,0}(x) = x$$

4 Ecuación de Gegenbauer. Polinomios de Gegenbauer

Si en la ecuación de Jacobi, consideramos los valores para α y β

$$\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$$

Obtenemos la denominada *ecuación de Gegenbauer*:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}w(x) - (2\lambda+1)x\frac{d}{dx}w(x) + n(n+2\lambda)w(x) = 0$$

Cuya solución normalizada $C_n(1) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(2\lambda)n!}$ son los denominados *polinomios de Gegenbauer* o *funciones ultraesféricas*

$$C_n^\lambda = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(2\lambda)n!}\,{}_2F\left(-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$$

Claramente, al ser los polinomios de Gegenbauer polinomios de Jacobi, éstos satisfacerán las relaciones de recurrencia, la fórmula de Rodrigues y de generarán mediante la función generatriz, sólo es necesario fijar los valores de α y β

4.1 Caso Particular $\lambda = \frac{1}{2}$: Polinomios de Legendre

Ahora, si partimos de la ecuación de Gegenbauer y fijamos $\lambda = \frac{1}{2}$ lo que implicaría en términos de los polinomios de Jacobi $\alpha = \beta = 0$ tenemos la *ecuación de Legendre*:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}w(x) - 2\,x\,\frac{d}{dx}w(x) + n(n+1)w(x) = 0$$

Cuya solución polinómica y normalizada son los *Polinomios de Legendre*, cuya expresión, en términos de la función hipergeométrica es

$$P_n(x) = {}_2F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

Dado que los polinomios de Legendre son particularmente interesantes debido a sus diversas aplicaciones, expresemos las diferentes propiedades que los caracterizan.

Consideremos las relaciones de recurrencia que satisfacen los polinomios de Jacobi

- **Relaciones de Recurrencia**. A partir de saber que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

- **Función Generatriz**

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\,t^\ell$$

- **Fórmula de Rodrigues**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

Los polinomios de Legendre poseen muchísimas más propiedades las cuales serán estudiadas desde el punto de vista práctico. Sin embargo, debemos mencionar una que es fundamental: *Ortogonalidad*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Para comprobar esta propiedad consideremos dos polinomios de Legendre de diferente grado, P_n y P_m. Ambos polinomios satisfacen cada uno la ecuación diferencial

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$
$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

Si multiplicamos la primera ecuación por $P_m(x)$ y la segunda por $P_n(x)$ y restamos, obtenemos

$$\begin{aligned} & (1-x^2)\left[P_n(x)P_m''(x) - P_m(x)P_n''(x)\right] - 2x\left[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)\right] = \\ = \; & [n(n+1) - n(m+1)]\, P_m(x)P_n(x) \end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)\right)\right] = [n(n+1) - m(m+1)]\, P_m(x)P_n(x)$$

Integrando entre -1 y 1 demostramos la propiedad para el caso $n \neq m$

Para el caso en que $n = m$ consideremos la función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\, t^\ell$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, se obtiene

$$\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\, P_m(x) t^{\ell+m}$$

integrando a ambos miembros con respecto a x, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2}\, dx &= \int_{-1}^{1} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\, P_m(x) t^{\ell+m}\, dx \\ \frac{1}{t}\ln\left[\frac{1+t}{1-t}\right] &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1} P_\ell^2(x)\, dx\right] t^{2\ell} \end{aligned}$$

(ya demostramos que si $\ell \neq m$ la integral se anula)

Si el miembro de la izquierda es desarrollado en serie de potencias de t, tenemos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2}{2\ell+1}\, t^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left\{\int_{-1}^{1} [P_\ell(x)]^2\, dx\right\} t^{2\ell}$$

con lo que, igualando términos de igual potencia de t demostramos la propiedad.

4.2 Caso Particular $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$: Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Gegenbauer para los cuales el parámetro λ vale 0 o 1 dan lugar a los denominados *Polinomios de Chebyshev* de primera y segunda especie, respectivamente.

Los polinomios de Chebyshev de primera especie posee las siguientes propiedades, todas derivadas de las propiedades generales de los polinomios de Jacobi

- **Ecuación Diferencial**

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}T_n(x) - x\,\frac{d}{dx}T_n(x) + n^2\,T_n(x) = 0$$

- **Normalización**

$$T_n(1) = 1$$

- **Recurrencia**

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

- **Fórmula de Rodrigues**

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\,\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+1/2)}(1-x^2)^{1/2}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-1/2}\right]$$

- **Función Generatriz**

$$\frac{1-x\,t}{1-2\,x\,t+t^2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} T_\ell(x)\,t^\ell$$

- **Ortogonalidad**

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,T_n(x)\,T_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \end{cases}$$

  Este tipo de producto interno tiene una *función peso* que en este caso es $w(x) = (1-x^2)$.

- **Relación con la función hipergeométrica**

$$T_n(x) = {}_2F\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$$

El caso correspondiente a $\lambda = 1$ da lugar a los polinomios de Chebyshev de segunda especie, pero las relaciones se obtienen de manera análoga a las anteriores, reemplazando en la ecuación de Gegenbauer.

Desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales, todas las funciones especiales son las soluciones polinómicas de las ecuaciones. Claramente, las ecuaciones admiten dos soluciones, pero nuestro propósito fue el de presentar las soluciones polinómicas.

5 Funciones Asociadas de Legendre. Armónicos Esféricos

Para culminar la exposición de las funciones denominadas esféricas, introduzcamos una ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}w(x) - 2\,x\,\frac{d}{dx}w(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]w(x) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son las funciones que denotaremos

$$P_n^m(x), \qquad Q_n^m(x)$$

Donde las $P_n^m(x)$ las llamaremos *funciones asociadas de Legendre de primera especie* y a las $Q_n^m(x)$ las de seguda especie.

Las funciones asociadas de Legendre son también denominadas *armónicos esféricos* por su relación con la resolución de la ecuación de Laplace en la esfera.

Estas funciones poseen las siguientes propiedades:

- **Fórmula de Rodrigues**

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}[P_n(x)]$$

- **Ortogonalidad**

$$\int_1^{-1} P_{n_1}^{m_1}(x)P_{n_2}^{m_2}(x) = \begin{cases} 0 & m_1 \neq m_2\ ,\ n_1 \neq n_2 \\ \frac{2}{2n_1+1}\frac{(n_1+m_1)!}{(n_1-m_1)!} & m_1 = m_2\ ,\ n_1 = n_2 \end{cases}$$

- **Relación con la función hipergeométrica**

$$P_n^m(x) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{m/2} {}_2F\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1-x}{2}\right)$$

6 Funciones Hipergeométricas Confluentes

Consideremos nuevamente la ecuación hipergeométrica

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}y(z) + [c-(a+b+1)z]\frac{d}{dz}y(z) - a\,b\,y(z) = 0$$

Vamos a definir una transformación que reduce la cantidad de singularidades a través de la transformación $z = \frac{x}{b}$ que al reemplazar en la ecuación diferencial

$$x\left(1-\frac{x}{b}\right)\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \left\{c - \left[\frac{(a-1)}{b}+1\right]x\right\}\frac{d}{dx}y(x) - a\,y(z) = 0$$

y si tomamos límite para $b \to \infty$ obtenemos la denominada *ecuación hipergeométrica confluente*[1]

$$x\frac{d^2}{dx^2}y(x) + (c - x)\,\frac{d}{dx}y(x) - a\,y(z) = 0$$

Esta ecuación diferencial admite una solución que puede ser obtenida a partir de cambiar la variable en la función hipergeométrica

$$y\left(\frac{x}{b}\right) = {}_2F\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)b^\ell}\frac{x^\ell}{\ell!}$$

Ahora consideremos la expresión (que contiene a b)

$$\frac{\Gamma(b+\ell)}{b^\ell\Gamma(b)} = \frac{b(b+1)(b+2)(b+3)\cdots(b+\ell-1)}{b^\ell} = \frac{b^\ell(1+\frac{1}{b})(1+\frac{2}{b})(1+\frac{3}{b})\cdots(1+\frac{\ell-1}{b})}{b^\ell}$$

Entonces,

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma(b+\ell)}{b^\ell\Gamma(b)} = 1$$

Con esto, la solución de la ecuación hipergeométrica confluente

$$y(x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\ell)}{\Gamma(c+\ell)\ell!}\,x^\ell$$

y a esta solución se la denomina *función hipergeométrica confluente*

$${}_1F(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\ell)}{\Gamma(c+\ell)\ell!}\,x^\ell$$

Además de la función ${}_1F(a; c; x)$ podemos definir otra función hipergeométrica confluente (la otra solución linealmente independendiente de la ecuación diferencial) definida a través de la relación

$$U(a, c, x) = A\,{}_1F(a; c; x) + B\,x^{1-c}\,{}_1F(a; c; x)$$

Esta función, al igual que la ${}_1F(a; c; x)$ puede ser obtenida también por un proceso de límite que elimina el parámetro b,

$$U(a, a-c, x) = \lim_{b\to\infty} x^{-a}\,{}_1F\left(a, c; b; 1 - \frac{b}{x}\right)$$

Que resulta, para A y B

$$A = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-c+a)} \qquad \text{y} \qquad B = \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}$$

[1]El término *confluencia* proviene de hacer ”confluir” dos puntos singulares regulares, que da lugar a un punto singular irregular. Visto que puntos singulares irregulares no forman parte de nuestro estudio, dejaremos las definiciones de confluencia a partir de operar sobre la función hipergeométrica.

6.1 Relaciones Contiguas de las funciones hipergeométricas confluentes

Análogamente a lo que se hizo con las funciones hipergeométricas, podemos definir las funciones contiguas de ${}_1F(a;c;x)$ a través de ${}_1F(a \pm 1;c;x)$ y ${}_1F(a;c \pm 1;x)$ para luego obtener las *relaciones contiguas*, esto es, las relaciones entre las funciones contiguas.

Antes de plantear las relaciones contiguas, podemos ver que

$$\frac{d}{dx}\,{}_1F(a;c;x) = \frac{a}{c}\,{}_1F(a+1;c+1;x)$$

con esta propiedad se pueden demostrar las siguientes

$$\begin{aligned}
(c-a){}_1F(a-1;c;x) &= (c-a-x){}_1F(a;c;x) + x\frac{d}{dx}{}_1F(a;c;x)\\
(c-1){}_1F(a;c-1;x) &= (c-1){}_1F(a;c;x) + x\,\frac{d}{dx}{}_1F(a;c;x)\\
a{}_1F(a+1;c;x) &= a{}_1F(a;c;x) + x\frac{d}{dx}{}_1F(a;c;x)\\
(c-a){}_1F(a;c+1;x) &= c{}_1F(a;c;x) - c\frac{d}{dx}{}_1F(a;c;x)
\end{aligned}$$

Además, podemos demostrar las siguientes relaciones de recurrencia

$$(c-a){}_1F(a-1;c;x) + (2a-c+x){}_1F(a;c;x) - a\,{}_1F(a+1;c;x) = 0$$

y

$$c(c-1){}_1F(a;c-1;x) - c(c-1+x){}_1F(a;c;x) + (c-a)a\,{}_1F(a;c+1;x) = 0$$

6.2 Representación Integral

La función hipergeométrica ${}_2F(a,b;c;x)$ admite una representación integral

$${}_2F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-z\,t)^{-a}\,dt$$

válida para $Re(c) > Re(b) > 0$ Si cambiamos la variable para definir la función hipergeométrica confluente, $z = \frac{x}{b}$ y luego tendemos b a infinito, podemos obtener

$${}_2F\left(a,b;c;\frac{x}{b}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-\frac{x}{b}\,t)^{-a}\,dt$$

utilizando la simetría respecto a a y b de la función hipergeométrica, podemos escribir

$${}_2F\left(a,b;c;\frac{x}{b}\right) ={}_2 F\left(b,a;c;\frac{x}{b}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\,(1-\frac{x}{b}\,t)^{-b}\,dt$$

Esta otra representación nos permite calcular el límite para b tendiendo a infinito, y obtener

$${}_1F\,(a;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\int_0^1 e^{xt}t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\,dt$$

7 Polinomios de Laguerre Generalizados

Vamos ahora a estudiar otros polinomios derivados de la ecuación de Jacobi, pero haciendo otros cambios de variable.

Dada la ecuación de Jacobi,

$$(1-x^2)y''(x) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]y'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)y(x) = 0$$

con $\alpha, \beta > -1$ y $n = 0, 1, 2, \dots$

Como vimos, los polinomios de Jacobi de primera especie, $P_n^{\alpha\,\beta}(x)$, son una solución de la ecuación.

Consideremos el cambio de variables

$$x = 1 - \frac{2}{\beta}\,t$$

y al reemplazar en la ecuación diferencial se obtiene

$$t\left(1-\frac{t}{\beta}\right)\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \left[\alpha+1-\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}\,t\right]\frac{d}{dt}y(t) + \frac{n}{\beta}\,(n+\alpha+\beta+1)y(t) = 0$$

si ahora tomamos el límite para β tendiendo a infinito se obtiene que la ecuación diferencial se transforma en

$$t\frac{d^2}{dt^2}y(t) + [\alpha+1-t]\,\frac{d}{dt}y(t) + n\,y(t) = 0$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de Laguerre generalizada*.

La solución de esta ecuación puede ser obtenida directamente haciendo el cambio de variables en la solución de la ecuación de Jacobi (es decir, en los polinomios de Jacobi) y luego tomar límite para β tendiendo a infinito.

Llamaremos entonces *polinomios de Laguerre generalizados* a la solución obtenida a partir de los polinomios de Jacobi

$$L_n^{\alpha}(t) = \lim_{\beta\to\infty} P_n^{\alpha\,\beta}(1-2t/\beta)$$

Si aplicamos el método de Frobenius, podemos obtener la expresión para los polinomios de Laguerre generalizados

$$L_n^{\alpha}(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\,\frac{\Gamma(\ell+\alpha+1)}{\Gamma(\ell+\alpha+1)\ell!(n-\ell)!}\,t^{\ell}$$

Además, la expresión para los polinomios generalizados de Laguerre podría haberse obtenido a partir de la función hipergeométrica confluente

$$L_n^{\alpha}(t) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\,{}_1F(-n;\alpha+1;t)$$

7.1 Ortogonalidad

A partir de la relación de ortogonalidad de los polinomios de Jacobi, vamos a encontrar la relación de ortogonalidad entre los polinomios de Laguerre generalizados, Para los polinomios de Jacobi tenemos

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta} P_n^{\alpha\,\beta}(x) P_m^{\alpha\,\beta}(x)\,dx = 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\delta_{m\,n}$$

Para encontrar la relación correspondiente a los polinomios de Laguerre generalizados deberíamos cambiar la variable $x = 1 - \frac{2}{\beta}\,t$ y luego tender β a infinito

$$\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta} \left(\frac{2\,t}{\beta}\right)^{\alpha} \left(2 - 2\frac{t}{\beta}\right)^{\beta} P_n^{\alpha\,\beta}\left(1-\frac{2}{\beta}t\right) P_m^{\alpha\,\beta}\left(1-\frac{2}{\beta}t\right)\,dt$$

$$\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\beta^{\alpha+1}}\int_0^{\beta} t^{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{\beta} P_n^{\alpha\,\beta}\left(1-\frac{2}{\beta}t\right) P_m^{\alpha\,\beta}\left(1-\frac{2}{\beta}t\right)\,dt$$

del otro lado de la igualdad tenemos

$$2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\delta_{m\,n}$$

que desarrollando la función Γ tenemos

$$2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\delta_{m\,n} \approx \delta_{m\,n}2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\frac{\mathcal{O}(\beta^0)}{\beta^{\alpha+1}+\mathcal{O}(\beta^0)}$$

Cancelando a ambos miembros de la igualdad y calculando el límite para $\beta \to \infty$ llegamos a la relación de ortogonalidad de los polinomios de Laguerre generalizados

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} L_n^{\alpha}(t) L_m^{\alpha}(t)\,dt = \frac{1}{n!}\Gamma(\alpha+n+1)\delta_{m\,n}$$

Estos polinomios también son conocidos como *polinomios asociados de Laguerre.*

Si fijamos el valor de $\alpha = 0$ obtenemos los *polinomios de Laguerre.*

En virtud de que los polinomios de Laguerre generalizados pueden escribirse en términos de la función hipergeométrica confluente, admiten relaciones de recurrencia, fórmula de Rodrigues, función generatriz.

7.2 Propiedades de los polinomios de Laguerre Generalizados

- **Relaciones de Recurrencia**.

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(t) = (2n+\alpha+1-t)L_n^{\alpha}(t) - (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(t)$$

$$(n+\alpha)L_n^{\alpha-1}(t) = (n+1)L_{n+1}^{\alpha}(t) - (n+1-t)L_n^{\alpha}(t)$$

$$L_n^{\alpha}(t) = L_n^{\alpha+1}(t) - L_{n-1}^{\alpha-1}(t)$$

- **Derivadas**.

$$\frac{d}{dt}L_n^{\alpha}(t) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}L_n^{\alpha}(t) - L_{n+1}^{\alpha}(t) = L_n^{\alpha}(t)$$

- **Función Generatriz**.

$$(1 - x\,t)^{-(\alpha+1)}\, e^{\left(\frac{x\,t}{x-1}\right)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell^\alpha(t)\, x^\ell$$

- **Fórmula de Rodrigues**.

$$L_n^\alpha(t) = t^{-\alpha} e^t \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[e^{-t} t^{n+\alpha}\right]$$

8 Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite también pueden ser obtenidos como caso particular de los polinomios de Laguerre generalizados.

Si en la ecuación de Laguerre cambiamos la variable $t = x^2$ obtenemos

$$x\, y''(x) + (2\alpha + 1 - 2x^2)\, y'(x) + 4\, n\, x\, y(x) = 0$$

Si en esta ecuación reemplazamos $\alpha = \pm 1/2$ obtenemos la denominada *ecuación de Hermite*. Para $\alpha = -1/2$ tenemos

$$y''(x) - 2x\, y'(x) + 2\,(2n)\, y(x) = 0$$

cuya solución serán los polinomios de Hermite de grado par.

si $\alpha = 1/2$ tenemos

$$z''(x) - 2x\, z'(x) + 2\,(2n + 1)\, z(x) = 0$$

con $z(x) = xy(x)$ tendremos como solución los polinomios de Hermite de grado impar.

9 Ecuación de Whittaker. Funciones de Whittaker

Comencemos con la ecuación hipergeométrica confluente

$$x\, y''(x) + (c - x)\, y'(x) - a\, y(x) = 0$$

e introduzcamos el siguiente cambio de variables

$$y(x) = e^{x/2}\, x^{-c/2}\, u(x)$$

Este cambio de variables transforma la ecuación diferencial original en la correspondiente para $u(x)$

$$u''(x) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{c - 2a}{2x} + \frac{c(2 - c)}{4x^2}\right] u(x) = 0$$

Si además se introducen dos nuevos parámetros μ y ν a través de

$$a = \mu + \frac{1}{2} - \nu, \qquad b = 1 + 2\mu$$

obtenemos la ecuación

$$u''(x) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right] u(x) = 0$$

Esta ecuación es denominada *ecuación de Whittaker* la cual está definida para valores de $\mu \neq -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$.

Una solución de esta ecuación puede escribirse a partir de la ecuación hipergeométrica confluente

$$M_{\nu;\mu}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\mu+\frac{1}{2}} \, {}_1F(\mu + 1/2 - \nu; 1\mu; x)$$

y la otra solución linealmente independiente

$$W_{\nu;\mu}(x) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu + 1/2 - \nu)} M_{\nu;-\mu}(x) + \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(-\mu + 1/2 - \nu)} M_{\nu;\mu}(x)$$

Tanto la ecuación, como las soluciones fueron obtenidas por Whittaker (Bulletin American Math. Soc. x. pp 125-134, 1904) y por tal motivo fueron llamadas *funciones de Whittaker de primer y segunda especie*, respectivamente.

9.1 Caso Particular: Ecuación de Bessel

Para finalizar nuestra breve y esquemática presentación de las funciones especiales, consideremos nuevamente la ecuación de Whittaker

$$u''(t) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{t} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{t^2} \right] u(t) = 0$$

Consideremos el caso $\nu = 0$ y realicemos el siguiente cambio de variables

$$x = 2t, \qquad y(x) = x^{-1/2} F(x)$$

la ecuación de Whittaker se transforma, para la función $F(x)$, en

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} F(x) + x \frac{d}{dx} F(x) - (x^2 + \mu^2) F(x) = 0$$

Que es la denominada *ecuación de Bessel modificada*, cuya solución viene dada por

$$F(x) = c_1 \, I_\mu(x) + c_2 \, K_\mu(x)$$

donde las funciones $I_\mu(x)$ y $K_\mu(x)$ son las *funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie*, respectivamente.

Como la ecuación de Bessel modificada se obtuvo a partir de un cambio de variables en la ecuación de Whittaker, es de esperar que la solución pueda escribirse también a partir de las funciones de Whittaker. En efecto, la relación entre las funciones de Bessel modificadas con las funciones de Whittaker viene dada a partir de

$$I_\mu(x) = \frac{2^{-2\mu - 1/2}}{\Gamma(1 + \mu)} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{0;\mu}(2x)$$

y

$$K_\mu(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \, W_{0,\mu}(2x)$$

Si nuevamente cambiamos la variable $x = i\,z$, la ecuación de Bessel modificada toma la forma

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} y(z) + z \frac{d}{dz} y(z) + (z^2 - \mu^2) \, y(z) = 0$$

es la conocida como *ecuación de Bessel* y cuya solución general

$$y(z) = c_1 \, J_\mu(z) + c_2 \, Y_\mu(z)$$

es una combinación lineal de las *funciones de Bessel,* $J_\mu(z)$ y las *funciones de Neumann,* $Y_\mu(z)$

Para la obtención de las expresiones de las funciones de Bessel y Neumann es tal vez más práctico la inspección de la ecuación a través de proponer una serie mediante el método de Frobenius, resultando

$$J_\mu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\mu \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell! \, \Gamma(\mu + \ell + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\ell}$$

En el caso en que μ no sea entero, $J_{-\mu}(z)$ es linealmente independiente con $J_\mu(z)$. En el caso de que μ sea entero, la función de Neumann se puede escribir

$$Y_\mu(z) = \frac{1}{\sin(\mu \, \pi)} \left[J_\mu(z) \, \cos(\mu\pi) - J_{-\mu}(z)\right]$$

donde esta última expresión debe entenderse como un proceso de límite, ya que si $\mu \in \mathbb{Z}$, $\sin(\mu \, \pi) = 0$

10 Bibliografía recomendada

[1] Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)

[2] Dueñas Ruiz, Herbert. *Sobre Perturbaciones de Polinomios Ortogonales Clásicos.* Tesis Doctoral, Universidad Carlos III, Madrid, España (2009)

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)