Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

IV

Ecuación de Riemann-Papperitz

Función Hipergeométrica

Ecuación Hipergeométrica

Octavio Miloni

1 Construcción de Ecuaciones Diferenciales Fuchsianas. Ecuación de Riemann-Papperitz

Vamos a estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que admitan puntos singulares, pero sólo regulares. Ecuaciones diferenciales de este tipo se denominan *de tipo Fuchsianas*. Además, este tipo de ecuaciones se caracterizan por ser invariantes por transformaciones de *Möbius*, también denominadas bilineales,

$$w = \frac{a\,z\,+\,b}{c\,z\,+\,d}$$

De este tipo de ecuaciones diferenciales, consideremos aquellas más elementales: En el caso de ecuaciones con un sólo punto singular regular, tenemos la ecuación de Euler.

Recordemos algunos aspectos elementales de la ecuación de Euler. Como vimos, esta ecuación tiene la forma, para el caso de x_0 como punto singular regular:

$$y''(x) + \frac{\alpha}{(x-x_0)}\,y'(x) + \frac{\beta}{(x-x_0)^2}\,y(x) = 0$$

El polinomio indicial es $p(r) = r^2 + (\alpha - 1)\,r + \beta = (r - r_1)(r - r_2)$ implica que si conocemos las raíces r_1 y r_2 se relacionan con los coeficientes de la ecuación

$$\alpha = 1 - r_1 - r_2, \qquad \beta = r_1\,r_2$$

Entonces, la Ecuación de Euler se puede escribir, conociendo las raíces del polinomio indicial

$$y''(x) + \left[\frac{1 - r_1 - r_2}{(x-x_0)}\right] y'(x) + \left[\frac{r_1\,r_2}{(x-x_0)^2}\right] y(x) = 0$$

1.1 Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente dos puntos singulares regulares finitos

Construyamos ahora una ecuación Fuchsiana con exactamente dos puntos singulares regulares finitos, x_1 y x_2. Para ello, utilicemos como base la ecuación de Euler.

Podemos construir sin problemas una ecuación diferencial con estas características. Consideremos como punto original la ecuación de Euler, con la siguiente modificación

$$y''(x) + \left[\frac{\alpha_1}{x-x_1} + \frac{\alpha_2}{x-x_2}\right] y'(x) + \left[\frac{\beta_1\,(x_1-x_2)}{x-x_1} + \frac{\beta_2\,(x_2-x_1)}{x-x_2}\right] \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} y(x) = 0$$

Notemos que esta ecuación tiene exactamente a x_1 y a x_2 como puntos singulares regulares. Consideremos que estos puntos son además finitos.

Supongamos además que imponemos la condición que el punto infinito es un punto ordinario.

Notemos que la ecuación para el punto infinito la obtenemos haciendo el cambio de variables podemos escribir la ecuación diferencial (ver las notas 3 de puntos singulares y ordinarios) originalmente escrita como

$$y''(x) + p(x)\,y(x) + q(x)\,y(x) = 0$$

debe cumplirse

$$\xi^4 \frac{d^2y}{d\xi^2} + \left[2\xi^3 - \xi^2\overline{p(\xi)}\right] \frac{dy}{d\xi} + \overline{q(\xi)}y = 0$$

entonces, una de las condiciones para que el punto infinito sea ordinario es que

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\overline{p(\xi)} = 0$$

que es equivalente a

$$\lim_{x\to\infty} 2x - x^2 p(x) = 0$$

La otra ecuación, que vincula a la función q es

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\overline{q(\xi)}}{\xi^4} = 0 \quad \text{equivalente} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty} x^4\, q(x) = 0$$

La ecuación que tenemos es

$$\begin{aligned} y''(x) \quad &+ \quad \left[\frac{1-r_1^{(1)}-r_2^{(1)}}{x-x_1} + \frac{1-r_1^{(2)}-r_2^{(2)}}{x-x_2}\right] y'(x) + \\ &+ \quad \left[\frac{r_1^{(1)}\, r_2^{(1)}\,(x_1-x_2)}{x-x_1} + \frac{r_1^{(2)}\, r_2^{(2)}\,(x_2-x_1)}{x-x_2}\right] \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} y(x) = 0 \end{aligned}$$

con lo que

$$p(x) = \frac{1-r_1^{(1)}-r_2^{(1)}}{x-x_1} + \frac{1-r_1^{(2)}-r_2^{(2)}}{x-x_2}$$

Para que el punto en el infinito se debe cumplir con la condición mencionada, con lo que

$$\lim_{x\to\infty} 2\,x - x^2 \left[\frac{1-r_1^{(1)}-r_2^{(1)}}{x-x_1} + \frac{1-r_1^{(2)}-r_2^{(2)}}{x-x_2}\right] = 0$$

Para que esto se cumpla, se debe cumplir

$$2 - 1 - r_1^{(1)} - r_2^{(1)} - 1 - r_1^{(2)} - r_2^{(2)} = 0$$

Entonces, obtenemos la relación que se debe satisfacer entre las raíces del polinomio indicial

$$r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + r_1^{(2)} + r_2^{(2)} = 0$$

La condiciones que impone la condición para $q(x)$ será $r_1^{(1)}\, r_2^{(1)} = r_1^{(2)}\, r_2^{(2)}$ y una ecuación con estas características se puede escribir:

$$y''(x) + \left[\frac{1-r_1^{(1)}-r_2^{(1)}}{x-x_1} + \frac{1+r_1^{(1)}+r_2^{(1)}}{x-x_2}\right] y'(x) + \frac{r_1^{(1)}\, r_2^{(1)}\,(x_1-x_2)^2}{(x-x_1)(x-x_2)}\, y(x) = 0$$

1.2 Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente dos puntos singulares regulares. Uno en el $x = 0$ y otro en el infinito

Tomando la ecuación anterior, consideremos la transformación de Möbius para pasar de los puntos x_1 y x_2 a los puntos cero e infinito.

La transformación que consigue la transformación de los puntos x_1 y x_2 al cero e infinito es

$$z = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

Escribamos entonces la ecuación diferencial original, pero en la nueva variable, z.

Para hacer esto, será necesario obtener las derivadas con respecto a z y el reemplazo de los términos en función de x, como función de z.

- x en función de z: A partir de la definición de la nueva variable z, podemos escribir:

$$x = \frac{x_2\, z - x_1}{z - 1}$$

- Cálculo de la derivada:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x_1 - x_2}{(z-1)^2}$$

- La relación entre derivadas se obtiene por cálculo directo

$$y'(x) = \frac{(z-1)^2}{(x_1 - x_2)} \frac{dy}{dz}$$

$$y''(x) = \frac{(z-1)^4}{(x_1 - x_2)^2} \frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{(z-1)^3}{(x_1 - x_2)^2} \frac{dy}{dz}$$

Además, en la ecuación diferencial aparecen los términos $x - x_1$ y $x - x_2$ los cuales se pueden escribir en función de z en la forma:

$$x - x_1 = -(x - x_1)\, \frac{z}{z-1}, \qquad x - x_2 = -\frac{x - x_1}{z - 1}$$

Con estas relaciones, podemos reemplazar todo lo obtenido en la ecuación diferencial y reescribirla como

$$(z-1)\frac{d^2y(z)}{dz^2} + \left[-\frac{\alpha_1}{z} + 2 - \alpha_2\right] \frac{dy(z)}{dz} + \left[-\frac{\beta_1}{z} + \beta_2\right] \frac{1}{z}\, y(z) = 0$$

La cual, redefiniendo las constantes, se puede escribir en términos generales, una ecuación diferencial de segundo orden con exactamente dos puntos singulares regulares, uno en el cero y otro en el infinito:

$$z^2(z-1)\frac{d^2y(z)}{dz^2} + (a + z\, b)\, z\, \frac{dy(z)}{dz} + (c + \ z\, d)\, y(z) = 0$$

1.3 La Ecuación de Riemann-Papperitz

De manera análoga, podemos escribir en general una ecuación diferencial de tipo Fuchs con tres puntos singulares regulares finitos, x_1, x_2 y x_3

$$\begin{aligned} y''(x) &+ \left[\frac{\alpha_1}{x-x_1}+\frac{\alpha_2}{x-x_2}+\frac{\alpha_3}{x-x_3}\right] y'(x) + \\ &+ \left[\frac{\beta_1\,(x_1-x_2)(x_1-x_2)}{x-x_1}+\frac{\beta_2\,(x_2-x_1)(x_2-x_3)}{x-x_2}+\right. \\ &+ \left.\frac{\beta_3\,(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{x-x_3}\right]\frac{y(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=0 \end{aligned}$$

Por cada punto singular regular, podemos escribirla en términos de las raíces del polinomio indicial para cada punto singular $r_1^{(1)}$ y $r_2^{(1)}$ para x_1; $r_1^{(2)}$ y $r_2^{(2)}$ para x_2 y $r_1^{(3)}$ y $r_2^{(3)}$ para x_3

$$\begin{aligned} y''(x) &+ \left[\frac{1-r_1^{(1)}-r_2^{(1)}}{x-x_1}+\frac{1-r_1^{(2)}-r_2^{(2)}}{x-x_2}+\frac{1-r_1^{(3)}-r_2^{(3)}}{x-x_3}\right] y'(x) + \\ &+ \left[\frac{r_1^{(1)}\,r_2^{(1)}\,(x_1-x_2)(x_1-x_2)}{x-x_1}+\frac{r_1^{(2)}\,r_2^{(2)}\,(x_2-x_1)(x_2-x_3)}{x-x_2}+\right. \\ &+ \left.\frac{r_1^{(3)}\,r_2^{(3)}\,(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{x-x_3}\right]\frac{y(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=0 \end{aligned}$$

Así escrita, se denomina *ecuación de Riemann-Papperitz*.

Con el objetivo de homogeneizar notación con textos clásicos, tales como el libro de Whittaker y Watson [2], llamemos α y α' las raíces del polinomio indicial asociado al punto singular regular x_1. Sean β y β' las raíces del polinomio indicial asociado al punto singular regular x_2 y γ y γ' los correspondientes a x_3. Cambiemos además los x_1, x_2 y x_3 por a, b, c, respectivamente. Con este cambio, la ecuación de Riemann-Paperitz toma la forma:

$$\begin{aligned} y''(x) &+ \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{x-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right] y'(x) + \\ &+ \left[\frac{\alpha\,\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a}+\frac{\beta\,\beta'\,(b-a)(b-c)}{x-b}+\right. \\ &+ \left.\frac{\gamma\,\gamma'\,(c-a)(c-b)}{x-c}\right]\frac{y(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0 \end{aligned}$$

Si además imponemos la condición de que el punto en el infinito sea ordinario tendremos que los números $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ y γ y γ' deben satisfacer la llamada *condición de Riemman*,

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$$

y se obtiene a partir de las condiciones de regularidad del punto en el infinito.

La solución formal de esta ecuación fue denotada por Riemann de la siguiente manera:

$$y(x) = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}$$

1.4 Propiedades de las Soluciones de la Ecuación de Riemann-Papperitz

Sea

$$y(x) = P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

la solución de la ecuación de Riemann-Papperitz

$$\begin{aligned} y''(x) \quad &+ \quad \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right] y'(x) + \\ &+ \quad \left[\frac{\alpha\,\alpha'\,(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\beta'\,(b-a)(b-c)}{x-b} + \right. \\ &+ \quad \left. \frac{\gamma\gamma'\,(c-a)(c-b)}{x-c}\right] \frac{y(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0 \end{aligned}$$

Una propiedad de gran utilidad es la siguiente,

$$(x-a)^{\ell_1}(x-b)^{\ell_2}(x-c)^{\ell_3} P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+\ell_1 & \beta+\ell_2 & \gamma+\ell_3 & x \\ \alpha'+\ell_1 & \beta'+\ell_2 & \gamma'+\ell_3 & \end{Bmatrix}$$

La demostración completa es muy complicada en términos calculísticos, pero podemos darnos una idea considerando la ecuación de Euler, ya que la ecuación de Riemann-Papperitz es una extensión de la de Euler incorporando puntos singulares regulares.

Consideremos la ecuación de Euler con punto singular regular a y raíces del polinomio indicial α y α'

$$y'' + \frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} y' + \frac{\alpha\,\alpha'}{(x-a)^2}\, y = 0$$

Sea $u(x) = (x-a)^{\ell}\, y(x)$, donde $y(x)$ es la solución de la ecuación de Euler. Entonces, $y(x) = (x-a)^{-\ell}\, u(x)$

Reemplazando $y(x)$ en la ecuación diferencial, obtenemos,

$$u''(x) + \left[\frac{-2\ell+1-\alpha-\alpha'}{x-a}\right] u'(x) + \left[\frac{\ell(\ell+1) - \ell(1-\alpha-\alpha') + \alpha\,\alpha'}{(x-a)^2}\right] u(x) = 0$$

Reagrupando convenientemente tenemos

$$u''(x) + \left[\frac{1-(\alpha+\ell)-(\alpha'+\ell)}{x-a}\right] u'(x) + \frac{(\alpha+\ell)(\alpha'+\ell)}{(x-a)^2} u(x) = 0$$

lo que implica que $\alpha \to \alpha+\ell$ y $\alpha' \to \alpha'+\ell$, que es justamente lo que plantea la propiedad, para este caso particular.

Otra formulación de lo anterior es, si $y(x)$ es solución de la ecuación de Riemann-Papperitz, entonces

$$\left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\ell_1} \left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\ell_2} P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+\ell_1 & \beta-\ell_1-\ell_2 & \gamma+\ell_2 & x \\ \alpha'+\ell_1 & \beta'-\ell_1-\ell_2 & \gamma'+\ell_2 & \end{Bmatrix}$$

2 Serie Hipergeométrica. Ecuación Hipergeométrica

Antes de continuar con el estudio de ecuaciones del tipo de Fuchs, vamos a ver con relativo detalle la denominada *serie hipergeométrica de Gauss*. Sean a, b y c tres números reales. La serie de potencias en la variable z definida a través de

$$ {}_2F(a,b;c;z) = 1 + \frac{a\,b}{c}\frac{z^1}{1!} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots $$

recibe el nombre de *serie de Gauss* o *serie hipergeométrica.* Podemos notar que c no puede ser un entero negativo, ya que en algún término se anularía el denominador.

Además, si a o b es un entero negativo, la serie es en realidad un polinomio, ya que se anula en alguno de sus términos.

Por ejemplo, de manera directa se puede obtener ${}_2F(a,-3;c;z)$ se puede escribir

$$ \begin{aligned} {}_2F(a,-3;c;z) &= 1 - 3\frac{a}{c}\frac{z^1}{1!} + 6\frac{a\,(a+1)}{c\,(c+1)}\frac{z^2}{2!} - 6\,\frac{a\,(a+1)(a+2)}{c\,(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} \\ &= 1 - 3\frac{a}{c}\frac{z^1}{1!} + 3\frac{a\,(a+1)}{c\,(c+1)}\,z^2 - \frac{a\,(a+1)(a+2)}{c\,(c+1)(c+2)}\,z^3 \end{aligned} $$

Nota histórica. John Wallis, en su trabajo *Arithmetica Infinitorum* del año 1655, fue el primero en usar el término hipergeométrica para la serie

$$ 1 + a + a(a+1) + a(a+1)(a+2) + a(a+1)(a+2)(a+3) + \cdots $$

incluso un caso más general,

$$ 1 + a + a(a+b) + a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) + \cdots $$

2.1 Análisis de Convegencia

Para el estudio de convergencia utilizaremos el criterio del cociente a_{n+1}/a_n cuando n tiende a infinito. Para este propósito resulta conveniente definir

$$ (a)_\ell = \begin{cases} 1 & \ell = 0 \\ a\,(a+1)\,(a+2)\,\cdots(a+\ell-1) & \ell > 0 \end{cases} $$

Con esta definición, la expresión de la serie hipergeométrica puede escribirse como

$$ {}_2F(a,b;c;z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a)_\ell(b)_\ell}{(c)_\ell}\frac{z^\ell}{\ell!} $$

En el caso en que a, b y c sean números naturales, podemos notar que

$$ (a)_\ell = \frac{(a+l-1)!}{(a-1)!} $$

y lo mismo para b y c. En el caso en que no fueran números naturales, podemos hacer uso de la función Γ, recordando que -para el caso de numeros naturales era $\Gamma(a) = (a-1)!$-

$$(a)_\ell = \frac{\Gamma(a+\ell)}{\Gamma(a)}$$

Entonces, otra expresión de la serie hipergeométrica es

$${}_2F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\ell)\Gamma(b+\ell)}{\Gamma(c+\ell)} \frac{z^\ell}{\ell!}$$

Para el estudio de la convergencia, consideremos el cociente $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ (siendo u_n el término n-ésimo de la serie) y luego tomemos límite para n tendiendo a infinito

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}\right| |z|$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |z|$$

lo que implica que la serie converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| > 1$. El caso $|z| = 1$ hay que estudiarlo particularmente.

Para el caso en que $|z| = 1$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$ con lo que debemos estudiar particularmente este caso. Para hacer el estudio podemos aplicar el criterio de Raabe el cual establece

Criterio de Raabe. *Sea la serie de términos positivos* $\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

Sea

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Entonces, si $L > 1$ *converge y si* $L < 1$ *diverge.*

Una reescritura de este criterio (ver Whittaker & Watson) es: *Si existe un número real positivo* λ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) = -1 - \lambda$$

la serie converge.

Volviendo a la serie hipergeométrica, para $|z| = 1$ tenemos el cociente

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}\right| = \left|\frac{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})}{(1+\frac{c}{n})(1+\frac{1}{n})}\right|$$

Notemos que

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right) = 1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}$$

$$\frac{1}{(1+\frac{c}{n})(1+\frac{1}{n})} \approx 1 - \frac{(c+1)}{n} + \frac{c^2+c+1}{n^2}$$

Con estas cuentas adicionales, podemos escribir

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}\right| = \left|1 + \frac{a+b-c-1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right|$$

Como en principio los números a, b y c son complejos, el valor absoluto es

$$\left|1 + \frac{a+b-c-1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{Re[a+b-c-1]}{n}\right)^2 + \left(\frac{Im[a+b-c]}{n}\right)^2 + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})}$$

Haciendo un desarrollo de Taylor alrededor de $\frac{1}{n} = 0$ podemos escribir

$$\left|1 + \frac{a+b-c-1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right| = 1 + \frac{Re[a+b-c-1]}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

Entonces,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 + \frac{Re[a+b-c]-1}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

Con lo cual

$$n\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - 1\right) = -1 + Re[a+b-c] + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

Tomando límite para $n \to \infty$ y aplicando el criterio de Raabe, tenemos que

La serie Hipergeométrica en $|z| = 1$ converge absolutamente si

$$Re[a+b-c] < 0$$

2.2 Relación de la Serie Hipergeométrica con Funciones Trascendentes

Mediante cálculo directo se puede demostrar las siguientes relaciones:

i)

$${}_2F(-n, b; b, -z) = (1+z)^n$$

ii)

$${}_2F(1, 1; 2, -z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$$

iii)

$$\lim_{\lambda\to\infty} {}_2F(1, \lambda; 1, \frac{z}{\lambda}) = e^z$$

iv)

$${}_2F(1/2, 1; 3/2; z^2) = \frac{\arctan(z)}{z}$$

2.3 Más Propiedades

- $$ {}_2F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (Gauss) $$

- $$ \frac{d}{dz}\left[{}_2F(a,b;c;z)\right] = \frac{a\,b}{c}\,{}_2F(a+1,b+1;c+1;z) $$

- $$ {}_2F(-n,b;c;1) = \frac{n!}{(c)_n}\int_0^1 t^{-n-1}(1-t)^{c+n-1}(1-tz)^{-b}dt \qquad (Euler) $$

2.4 Ecuación Diferencial Hipergeométrica

Uno de los mayores avances en el estudio de las funciones hipergeométricas, fue hecho por el matemático prusiano Ernst Kummer (1816-1893) quien descubrió que la función hipergeométrica es solución de la ecuación diferencial

$$ z(1-z)\,\frac{d^2y}{dz^2} + \left[c-(1+a+b)\,z\right]\frac{dy}{dz} - ab\,z = 0 $$

Notemos que podemos escribir esta ecuación diferencial como

$$ \left\{\frac{d}{dz}\left[z\,\frac{d}{dz}+c-1\right] - \left[z\,\frac{d}{dz}+a\right]\left[z\,\frac{d}{dz}+b\right]\right\} y(z) = 0 $$

Luego reemplazando en la ecuación diferencial $y(z) = {}_2F(a,b;c;z)$ verificamos que se cumple la igualdad.

2.5 Relación entre la Ecuación de Riemann-Papperitz y la Ecuación Hipergeométrica

A partir de las propiedades de la ecuación de Riemann-Papperitz, podemos escribir:

$$ P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & x \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{matrix}\right\} $$

Consideremos ahora el cambio de variable

$$ z = \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)} $$

Este cambio produce una transformación que al $a\to 0$, al $b\to\infty$ y al $c\to 1$, lo que transforma la ecuación diferencial en otra cuya solución se puede denotar

$$ P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{matrix}\right\} $$

Veamos ahora cuál es la ecuación satisfecha por esta última expresión

Comencemos entonces con la ecuación diferencial

$$y'' + \left[\frac{1-(\alpha-\alpha')}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'-2\alpha-2\gamma}{x-b} + \frac{1-(\gamma-\gamma')}{x-c}\right] y'(x) +$$
$$+ \quad \frac{(\beta+\alpha+\gamma)(\beta'+\alpha+\gamma)(b-a)(b-c)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)}\, y(x) = 0$$

mediante el cambio de variable $z = \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}$ tenemos que reescribir la ecuación diferencial en términos de la variable z, para ello, hacemos

$$x = \frac{a(b-c) - b(a-c)z}{(b-c)-(a-c)z}$$

Entonces,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{[(b-c)-(a-c)z]^2}$$

Además, tenemos

$$\frac{dy}{dz} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{[(b-c)-(a-c)z]^2} y'(x) \qquad \rightarrow \qquad y'(x) = \frac{[(b-c)-(a-c)z]^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}\frac{dy}{dz}$$

Análogamente, obtenemos,

$$y''(x) = \frac{[(b-c)-(a-c)z]^4}{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2}\frac{d^2y}{dz^2} - 2(a-c)\frac{[(b-c)-(a-c)z]^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}\frac{dy}{dz}$$

Además, es necesario calcular

$$(x-a) = \frac{(a-b)(a-c)\, z}{[(b-c)-(a-c)z]}, \qquad (x-b) = \frac{(a-b)(b-c)}{[(b-c)-(a-c)z]}, \qquad (x-b) = \frac{(a-c)(b-c)(1-z)}{[(b-c)-(a-c)z]}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y simplificando obtenemos

$$\frac{d^2y}{dz^2} \quad + \quad \frac{1}{[(b-c)-(a-c)z]}\left\{\frac{(b-c)(1-\alpha+\alpha')}{z} + (a-c)(1-\beta-\beta'-2\alpha-2\gamma-2) + \right.$$
$$\left. + \quad \frac{(a-b)(1-\gamma+\gamma')}{1-z}\right\}\frac{dy}{dz} - \frac{(\beta+\alpha+\gamma)(\beta'+\alpha+\gamma)}{z(1-z)}\, y(z) = 0$$

Si llamamos $A = \beta+\alpha+\gamma$, $B = \beta'+\alpha+\gamma$ y $C = 1+\alpha-\alpha'$ la ecuación se puede escribir

$$z(1-z)\,\frac{d^2y}{dz^2} + [C-(1+A+B)\,z]\,\frac{dy}{dz} - AB\,z = 0$$

Lo que implica que podemos relacionar la ecuación de Riemann-Papperitz con la ecuación hipergeométrica, y sus soluciones,

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & x \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{matrix}\right\}$$
$$= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ 0 & A & 0 & x \\ 1-C & B & C-A-B & \end{matrix}\right\}$$

Llamando $z = \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}$ obtenemos

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & A & 0 & z \\ 1-C & B & C-A-B & \end{matrix}\right\}$$

Y por lo que hemos obtenenido

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F(A,B;C;z)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = \\ = \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F\left(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma; 1+\alpha-\alpha'; \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}\right)\end{aligned}$$

2.6 Soluciones de Kummer

En 1836 Ernst Kummer encontró que la ecuación de Riemann-Papperitz admite 24 representaciones diferentes utilizando funciones hipergeométricas. Estas representaciones se denominan *soluciones de Kummer*. Podemos notar que a partir de la ecuación de Riemmann-Papperitz

$$\begin{aligned} y''(x) &+ \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right] y'(x) + \\ &+ \left[\frac{\alpha\,\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\,\beta'\,(b-a)(b-c)}{x-b} + \right. \\ &+ \left.\frac{\gamma\,\gamma'\,(c-a)(c-b)}{x-c}\right] \frac{y(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0 \end{aligned}$$

- Si se intercambia α con α' y γ con γ' la ecuación es la misma, pero puede ser escrita mediante 4 representaciones distintas.

$$\begin{aligned} u_1 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma; 1+\alpha-\alpha'; z) \\ u_2 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma; 1+\alpha'-\alpha; z) \\ u_3 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma'} {}_2F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma'; 1+\alpha-\alpha'; z) \\ u_4 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma'} {}_2F(\alpha'+\beta+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma'; 1+\alpha'-\alpha; z) \end{aligned}$$

- Si se van intercambiando a, b, y c y α con α', β con β' y γ con γ'.

De esta manera, Kummer construyó las 24 representaciones, las cuales son:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta'+\gamma;1+\alpha-\alpha';z)\\
u_2 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F(\alpha'+\beta+\gamma,\alpha'+\beta'+\gamma;1+\alpha'-\alpha;z)\\
u_3 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma'} {}_2F(\alpha+\beta+\gamma',\alpha+\beta'+\gamma';1+\alpha-\alpha';z)\\
u_4 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma'} {}_2F(\alpha'+\beta+\gamma',\alpha'+\beta'+\gamma';1+\alpha'-\alpha;z)\\
u_5 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha} {}_2F(\beta+\gamma+\alpha,\beta+\gamma'+\alpha;1+\beta-\beta';z)\\
u_6 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha} {}_2F(\beta'+\gamma+\alpha,\beta'+\gamma'+\alpha;1+\beta'-\beta;z)\\
u_7 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha'} {}_2F(\beta+\gamma+\alpha',\beta+\gamma'+\alpha';1+\beta-\beta';z)\\
u_8 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha'} {}_2F(\beta'+\gamma+\alpha',\beta'+\gamma'+\alpha';1+\beta'-\beta;z)\\
u_9 &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta} {}_2F(\gamma+\alpha+\beta,\gamma+\alpha'+\beta;1+\gamma-\gamma';z)\\
u_{10} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta} {}_2F(\gamma'+\alpha+\beta,\gamma'+\alpha'+\beta;1+\gamma'-\gamma;z)\\
u_{11} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta'} {}_2F(\gamma+\alpha+\beta',\gamma+\alpha'+\beta';1+\gamma-\gamma';z)\\
u_{12} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta'} {}_2F(\gamma'+\alpha+\beta',\gamma'+\alpha'+\beta';1+\gamma'-\gamma;z)\\
u_{13} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta} {}_2F(\alpha+\gamma+\beta,\alpha+\gamma'+\beta;1+\alpha-\alpha';z)\\
u_{14} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta} {}_2F(\alpha'+\gamma+\beta,\alpha'+\gamma'+\beta;1+\alpha'-\alpha;z)\\
u_{15} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta'} {}_2F(\alpha+\gamma+\beta'+,\alpha+\gamma'+\beta';1+\alpha-\alpha';z)\\
u_{16} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\alpha'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\beta'} {}_2F(\alpha'+\gamma+\beta',\alpha'+\gamma'+\beta';1+\alpha'-\alpha;z)\\
u_{17} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha} {}_2F(\gamma+\beta+\alpha,\gamma+\beta'+\alpha;1+\gamma-\gamma';z)\\
u_{18} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma'}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha} {}_2F(\gamma'+\beta+\alpha,\gamma'+\beta'+\alpha;1+\gamma'-\gamma;z)\\
u_{19} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma}\left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha'} {}_2F(\gamma+\beta+\alpha',\gamma+\beta'+\alpha;1+\gamma-\gamma';z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_{20} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\gamma'} \left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\alpha'} {}_2F(\gamma'+\beta+\alpha', \gamma'+\beta'+\alpha; 1+\gamma'-\gamma; z) \\
u_{21} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta} \left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F(\beta+\alpha+\gamma, \beta+\alpha'+\gamma; 1+\beta-\beta'; z) \\
u_{22} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta'} \left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma} {}_2F(\beta'+\alpha+\gamma, \beta'+\alpha'+\gamma; 1+\beta'-\beta; z) \\
u_{23} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta} \left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma'} {}_2F(\beta+\alpha+\gamma', \beta+\alpha'+\gamma'; 1+\beta-\beta'; z) \\
u_{24} &= \left[\frac{(x-a)}{(x-b)}\right]^{\beta'} \left[\frac{(x-c)}{(x-b)}\right]^{\gamma'} {}_2F(\beta'+\alpha+\gamma', \beta'+\alpha'+\gamma'; 1+\beta'-\beta; z)
\end{aligned}
$$

Estas 24 funciones son solución de la ecuación

$$
\begin{aligned}
y''(x) &+ \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right] y'(x) + \\
&+ \left[\frac{\alpha\,\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\,\beta'\,(b-a)(b-c)}{x-b} + \right. \\
&+ \left. \frac{\gamma\,\gamma'\,(c-a)(c-b)}{x-c}\right] \frac{y(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0
\end{aligned}
$$

en la variable $z = \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}$

Lo presentado en este material permite abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales con puntos singulares regulares de una manera muy general, tanto que nos permite abordar el estudio de funciones especiales a partir de relaciones con la función hipergeométrica.

El estudio particular de las ecuaciones tales como la de Legendre, Bessel, Laguerre, etc. no nos permite dimensionar las conexiones existentes entre estas ecuaciones diferenciales, cosa que sí lo hace esta manera de verlas.

En el próximo capítulo desarrollaremos las diferentes relaciones entre las funciones especiales con la ecuación de Riemann-Papperitz.

3 Bibliografía recomendada

[1] Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física, Universidade de São Paulo. (2005)

[2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)

[3] Deaño Cabrera, Alfredo. *Tesis Doctoral*, Universidad Carlos III, Madrid, España (2006)

[4] Slater, Lucy J. *Generalized Hypergeometric Functions*, Ed. Cambridge University Press (1966)