Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

III

Ec. Diferenciales con Coeficientes Variables Puntos Ordinarios y Singulares

Octavio Miloni

1 Definiciones. Puntos Ordinarios y Singulares Regulares

Consideremos ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)\, y(x) \;=\; 0$$

la cual puede reescribirse como

$$y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \frac{a_0(x)}{a_n(x)}\, y(x) \;=\; 0$$

Si quisiéramos buscar una solución en serie entorno a un punto x_0 será necesario que cada coeficiente de la ecuación no presente ninguna singularidad, ya que la garantía de soluciones, ya sea en un esquema del tipo Picard o mediante aplicación del Teorema de Cauchy requiere como mínimo continuidad de las funciones intervinientes en la ecuación diferencial.

El caso que vamos a analizar, en virtud de que procuramos soluciones en serie será el que las funciones sean analíticas en el punto alrededor del cual exista una solución en serie. Para ello, es necesario introducir la siguiente definición,

Definición. Punto Ordinario. *Dada una ecuación diferencial de la forma*

$$y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \frac{a_0(x)}{a_n(x)}\, y(x) \;=\; 0$$

Diremos que x_0 es un punto ordinario si y sólo si las funciones $\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}, \frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)}, \ldots, \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$ son analíticas en x_0.

En torno a puntos ordinarios, tendremos soluciones analíticas, en una determinada región. Por lo cual, tendremos soluciones en serie de la forma

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, x^j$$

La convergencia de las series está garantizada por la analiticidad de los coeficientes, pero el radio de convergencia $|x - x_0| \leq \rho$ estará determinado por el

$$\rho < \min\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\}$$

donde ρ_j es el radio del dominio de analiticidad de las funciones $\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}, \frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)}, \ldots, \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$.

Observación sobre intervalos de convergencia. Como ejemplo, consideremos la ecuación diferencial

$$y'''(x) + \frac{1}{1+x^2} y''(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = 0$$

Notemos que $x_0 = \frac{1}{2}$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial. Ahora, para analizar los radios de convergencia deberíamos estudiar las regiones de analiticidad de las funciones coeficientes. Para ello, notemos que la función $\frac{1}{1+x^2}$ tiene una singularidad en $x = \pm i$ y la función $\frac{1}{x}$, en $x = 0$. A partir de esto, desarrollo alrededor de $x = 1/2$ tendrá un límite cuando alcance a $x = 0$ por lo que el radio de la región de analiticidad para la función $\frac{1}{x}$ es $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. Para determinar el radio de la región de analiticidad de la función $\frac{1}{1+x^2}$ debemos calcular la distancia entre $x = 1/2$ y $x = \pm i$ esa distancia será $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ entonces, como $1/2$ es el menor, tendremos que la solución en serie tendrá un radio de convergencia $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$

2 Soluciones en Serie de EDO de Segundo Orden Entorno a Puntos Ordinarios

A partir de la garantía de soluciones en serie para ecuaciones diferenciales con coeficientes analíticos en un punto determinado, x_0, vamos a buscar soluciones en serie de la forma

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \,(x - x_0)^j$$

y luego al imponer que se satisfaga la ecuación diferencial se encuentrar los coeficientes c_j

Ejemplo. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(x) + x\, y = 0$$

Procuremos una solución en serie alrededor de $x = 0$, es decir,

$$y(x) = \sum_{j=0} c_j \, x^j$$

Las derivadas son

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, c_j \, x^{j-1}, \qquad y''(x) = \sum_{j=0}^{\infty} j\,(j-1)\, c_j \, x^{j-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial,

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\,(j-1)\, c_j \, x^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \, x^{j+1} = 0$$

Separemos el término correspondiente a x^0 y reagrupando podemos escribir:

$$2\, c_2 + \sum_{j=0}^{\infty} (j+3)\,(j+2)\, c_{j+3}\, x^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \, x^{j+1} = 2\, c_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \left[(j+3)\,(j+2)\, c_{j+3} \; + \; c_j\right] x^{j+1} = 0$$

con lo que obtenemos,

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_{j+3} &= -\frac{c_j}{(j+3)\,(j+2)} \end{aligned}$$

Esta recurrencia establece: c_0 y c_1 libres, deben ser definidos *a priori*. $c_2 = 0$, lo que condiciona a $c_5 = c_8 = \cdots = c_{2+3\,\ell} = 0$ y los demás términos se obtienen a partir de la recurrencia establecida.

Como los coeficientes de la ecuación diferencial son analíticos en todo el plano complejo, es de esperar que la serie sea convergente en toda la recta real, pero se puede estudiar en términos del criterio del cociente,

$$\lim_{\ell \to \infty} \left| \frac{c_{\ell+3}\, x^{\ell+3+1}}{c_\ell \, x^{\ell+1}} \right| = \frac{1}{(\ell+3)(\ell+2)} |x|^3 = 0$$

para todo x. Lo que indica que la serie converge para todo valor de x.

3 Puntos Singulares Regulares. I: Ecuación de Euler

En este apartado vamos a estudiar ecuaciones diferenciales las cuales poseen coeficientes que no son analíticos en algún conjunto de puntos. No obstante, no todas las ecuaciones diferenciales con singularidades de este tipo admitirán soluciones en serie. Más aún, como buscaremos soluciones de ecuaciones entorno a puntos de signularidad, no podremos esperar series de potencias tipo Taylor, ya que esto implicaría analiticidad de la solución, cosa no garantizada.

Además, de las posibles singularidades existentes, sólo analizaremos un tipo particular, las que definiremos como puntos singulares regulares.

Definición. Punto Singular Regular. *Dada una ecuación diferencial de segundo orden de la forma*

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) \;=\; 0$$

Diremos que x_0 es un punto singular regular si y sólo si las funciones

$$(x - x_0)\, \frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad y \qquad (x - x_0)^2\, \frac{R(x)}{P(x)}$$

son analíticas en x_0.

Sobre lo específico de la definición volveremos más adelante y estará sustentada en la integrabilidad de la ecuación de Euler.

3.1 La Ecuación de Euler

Consideremos la ecuación diferencial

$$x^2\, y''(x) + \alpha\, x\, y'(x) + \beta\, y(x) \;=\; 0$$

donde α y β son números reales.

Esta ecuación diferencial es el paradigma de las ecuaciones con un punto singular regular, x_0. Además, la propia estructura de la ecuación diferencial sugiere a una solución de la forma $y = x^r$. Reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene

$$r(r-1)\, x^r + \alpha\, r\, x^r + \beta\, x^r = [r(r-1) + \alpha\, r + \beta]\, x^r = 0$$

Entonces, la potencia r se obtiene resolviendo la ecuación

$$r(r-1) + \alpha\, r + \beta = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

Podemos definir el polinomio $p(r)$ y lo llamaremos *polinomio indicial* a

$$p(r) = r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta$$

de tal manera que la potencia de las soluciones a la ecuación diferencial sean las raíces de este polinomio cuya ecuación se denomina *ecuación indicial*, $p(r) = r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta = 0$

Analicemos las diferentes soluciones de la ecuación indicial, ya que si bien admite dos, estas pueden ser diferentes reales, diferentes complejas o iguales.

3.1.1 Raíces reales distintas

Dada la ecuación indicial,

$$r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta = 0$$

para el caso

$$(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$$

tendremos dos soluciones reales distintas, r_1 y r_2, con lo que la solución general será

$$y(x) = c_1\, x^{r_1} + c_2\, x^{r_2}$$

3.1.2 Raíces complejas distintas

Para el caso de que las raíces complejas conjugadas (ya que los coeficientes α y β con reales) tenemos que $r_1 = \xi + i\,\eta$ y $r_2 = \xi - i\,\eta$ entonces,

$$y(x) = c_1\, x^{\xi + i\eta} + c_2\, x^{\xi - i\eta} = c_1\, x^{\xi} x^{i\eta} + c_2\, x^{\xi} x^{-i\eta}$$

Reescribiendo $x^{i\eta} = e^{i\eta\, \ln(|x|)}$ entonces, podemos escribir la solución general

$$y(x) = x^{\xi}\left[(c_1 + c_2)\cos(\eta\, \ln|x|) + (c_1 - c_2)\sin(\eta\, \ln|x|)\right]$$

3.1.3 Raíces iguales

Para el caso en que las raíces sean iguales, llamémosla r_1, el polinomio indicial puede escribirse $p(r) = (r - r_1)^2$. Si escribimos la ecuación diferencial, y al reemplazar $y = x^r$,

$$x^2 y'' + \alpha\, x\, y' + \beta\, y = (r - r_1)^2\, x^r$$

esta ecuación diferencial resulta cero en el r_1. Notemos que si derivamos la ecuación diferencial con respecto a r, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(r - r_1)^2 x^{r_1}\right] = 2(r - r_1)x^r + (r - r_1)^2 x^r \ln(|x|)$$

Lo que significa que la derivada de la ecuación diferencial, evaluada en $r = r_1$ también da cero.

Entonces, permutando la derivación con respecto a r, tendremos que la derivada con respecto a r de la función solución también es solución, esto es $x^{r_1}\ln(|x|)$ también es solución, por lo que la solución general es

$$y(x) = x^{r_1}(c_1 + c_2\, \ln|x|)$$

Ahora que tenemos caracterizadas todas las posibles soluciones para la ecuación de Euler, estamos en condiciones de estudiar una ecuación diferencial y proponer una solución en serie de potencias de $x - x_0$ donde x_0 sea un punto singular regular.

La ecuación de Euler será el sustendo teórico para la búsqueda de soluciones en un entorno de puntos singulares regulares.

4 Puntos Singulares Regulares. II: Método de Frobenius

Una vez estudiada en detalle la ecuación de Euler, consideremos un caso más general de ecuación diferencial lineal de segundo orden que tenga un punto singular regular.

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que el punto singular regular es el $x = 0$, a los fines de simplificar la escritura.

Consideremos la ecuación diferencial

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) = 0$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$y''(x) + \frac{Q(x)}{P(x)}\, y'(x) + \frac{R(x)}{P(x)}\, y(x) = 0$$

multiplicando a ambos miembros por x^2 obtenemos

$$x^2\, y''(x) + x^2\, \frac{Q(x)}{P(x)}\, y'(x) + x^2\, \frac{R(x)}{P(x)}\, y(x) = 0$$

Podemos reescribir la ecuación en la forma

$$x^2\, y''(x) + x\, \left[x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right]\, y'(x) + \left[x^2\, \frac{R(x)}{P(x)}\right]\, y(x) = 0$$

Las expresiones entre corchetes son funciones analíticas ya que $x = 0$ es un punto singular regular (en este punto cobra sentido la especificidad en la definición de punto singular regular)

Por lo tanto, para las funciones entre corchetes tenemos series de Taylor convergentes alrededor de $x = 0$,

$$\begin{aligned} \left[x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right] &= \alpha_0 + \alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \alpha_3\, x^3 + \cdots \\ \left[x^2\, \frac{R(x)}{P(x)}\right] &= \beta_0 + \beta_1\, x + \beta_2\, x^2 + \beta_3\, x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Si reemplazamos estas expresiones en la ecuación diferencial, tenemos

$$x^2\, y''(x) + x\, \left[\alpha_0 + \alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \cdots\right] y'(x) + \left[\beta_0 + \beta_1\, x + \beta_2\, x^2 + \cdots\right] y(x) = 0$$

distribuyendo el primer término

$$x^2\, y''(x) + \alpha_0\, x\, y'(x) + x\, \left[\alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \cdots\right] y'(x) + \beta_0\, y(x) + \left[\ \beta_1\, x + \beta_2\, x^2 + \cdots\right] y(x) = 0$$

Reagrupando, tenemos

$$\underbrace{x^2\, y''(x) + \alpha_0\, x\, y'(x) + \beta_0\, y(x)}_{Euler} + \left[\alpha_1\, x + \alpha_2\, x^2 + \cdots\right] y'(x) + \left[\ \beta_1\, x + \beta_2\, x^2 + \cdots\right] y(x) = 0$$

el polinomio indicial para la correspondiente ecuación de Euler, será

$$p(r) = r^2 + (\alpha_0 - 1)\, r + \beta_0$$

El hecho de que un primer término sea la ecuación de Euler, sugiere y motiva a buscar soluciones en serie para la ecuación diferencial (ahora, la completa) en la forma

$$y(x) = x^r \sum_{l=0}^{\infty} c_l \, x^l$$

donde r sea solución de la ecuación indicial $r^2 + (\alpha_0 - 1)\, r + \beta_0$

Con esta propuesta de solución, tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= x^r \sum_{l=0}^{\infty} c_l \, x^l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \, x^{l+r} \\ y'(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+r)\, c_l \, x^{l+r-1} \\ y''(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+r)\,(l+r-1)\, c_l \, x^{l+r-2} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial,

$$x^r \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} (l+r)\,(l+r-1)\, c_l \, x^l + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \,(l+r)\, c_l \, x^{l+j} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \, c_l \, x^{l+j} \right\} = 0$$

entonces,

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+r)\,(l+r-1)\, c_l \, x^l + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \,(l+r)\, c_l \, x^{l+j} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \, c_l \, x^{l+j} = 0$$

Ordenemos las sumatorias, de manera tal de sistematizar el cálculo.

Llamemos $\ell = j + l$ luego, $l = \ell - j$ y reescribamos las sumatorias dela siguiente manera: $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ y $j = 0, 1, 2 \ldots \ell$ es decir, ℓ desde cero a infinito y j desde cero hasta ℓ. Entonces, podemos reescribir la ecuación

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+r)\,(l+r-1)\, c_l \, x^l + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j \,(\ell + r - j)\, c_{\ell-j} \right] x^\ell + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\ell} \beta_j \, c_{\ell-j} \right] x^\ell = 0$$

En la primera sumatoria podemos cambiar la letra l por ℓ y agrupando tenemos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ (l+r)\,(l+r-1)\, c_l + \sum_{j=0}^{\ell} c_{\ell-j} \, \left[\alpha_j \,(\ell + r - j) + \beta_j \right] \right\} x^\ell = 0$$

lo que implica que para $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ se debe cumplir

$$(\ell + r)\,(\ell + r - 1)\, c_l + \sum_{j=0}^{\ell} c_{\ell-j} \, \left[\alpha_j \,(\ell + r - j) + \beta_j \right] = 0$$

Extrayendo el primer término de la sumatoria, correspondiente a $j = 0$, tenemos,

$$c_\ell \left[(\ell + r)(\ell + r - 1) + \alpha_0 (\ell + r) + \beta_0\right] + \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell - j}\, \left[\alpha_j (\ell + r - j) + \beta_j\right] = 0$$

que es equivalente a

$$c_\ell \left\{(\ell + r)^2 + \alpha_0\, \left[(\ell + r) - 1\right] + \beta_0\right\} + \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell - j}\, \left[\alpha_j (\ell + r - j) + \beta_j\right] = 0$$

recordando la expresión del polinomio indicial, $p(r) = r^2 + \alpha_0 (r - 1) + \beta_0$ podemos escribir la última expresión como

$$p(r + \ell)\, c_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell - j}\, \left[\alpha_j (\ell + r - j) + \beta_j\right] = 0$$

para $\ell = 0$ tenemos,

$$p(r)\, c_0 = 0$$

entonces r debe ser raíz del polinomio indicial $p(r) = 0$ que es la *ecuación indicial*.

Para los demás términos, se obtuvo la relación de recurrencia para los coeficientes del desarrollo

$$c_\ell = -\frac{1}{p(\ell + r)} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell - j}\, \left[\alpha_j (\ell + r - j) + \beta_j\right], \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

Observación. Con la expresión anterior podemos obtener todos los coeficientes del desarrollo $x^r \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell\, x^\ell$, donde r es raíz del polinomio indicial. Como el polinomio indicial es de grado dos, esperamos dos soluciones, las cuales pueden ser distintas o iguales.

Si las raíces son distintas, pero su diferencia es un número entero, nos encontramos con el siguiente problema: Sean r_1 y r_2 soluciones de la ecuación indicial, tales que $r_1 - r_2 = N$, con N entero. Sea $r_1 < r_2$. Al calcular el desarrollo correspondiente a la solución con $r = r_1$ tendremos

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell^{(r_1)}\, x^\ell$$

donde, para $\ell \geq 1$ la recurrencia será

$$c_\ell^{(r_1)} = -\frac{1}{p(\ell + r_1)} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell - j}^{(r_1)}\, \left[\alpha_j (\ell + r - j) + \beta_j\right], \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

Ahora, conforme varía ℓ podemos llegar a $\ell = N$ y por lo tanto

$$c_N^{(r_1)} = -\frac{1}{p(N + r_1)} \sum_{j=1}^{N} c_{N - j}^{(r_1)}\, \left[\alpha_j (N + r - j) + \beta_j\right]$$

pero $N + r_1 = r_2$ que también es solución de la ecuación indicial, $p(r_2) = p(r_1 + N) = 0$ por lo que no se pueden calcular los coeficientes.

Esto significa que el caso en que la diferencia entre raíces del polinomio indicial sea un entero debe ser estudiada particularmente.

4.1 Raíces distintas con $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

Este caso es sencillo ya que a partir de la resolución de la ecuación indicial, $p(r) = 0$ tenemos que la solución general es

$$y(x) = \lambda_1 \, x^{r_1} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_1)} \, x^\ell \right] + \lambda_2 \, x^{r_2} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_2)} \, x^\ell \right]$$

donde los coeficientes $c_\ell^{(r_{1,2})}$ se obtienen a partir de la expresión, para $c_0^{(r_{1,2})} = 1$

$$c_\ell^{(r_{1,2})} = -\frac{1}{p(\ell + r_{1,2})} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}^{(r_{1,2})} \left[\alpha_j \left(\ell + r_{1,2} - j \right) + \beta_j \right], \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

y donde los α_j y β_j son los coeficientes del desarrollo de Taylor de las funciones $x \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $x^2 \frac{R(x)}{P(x)}$, respectivamente.

4.2 Raíces iguales

Analicemos ahora el caso en que la ecuación indicial posee una sola raíz real, r_1. La solución que se propone es la dada por la expresión

$$y(x) = x^{r_1} + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \, x^{\ell + r_1}$$

donde asumimos $c_0 = 1$ y la relación para la determinación de los c_ℓ, $(\ell = 1, 2, 3 \ldots)$, es

$$c_\ell = -\frac{1}{p(\ell + r_1)} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j} \left[\alpha_j \left(\ell + r_1 - j \right) \right] + \beta_j \right]$$

donde, $p(r) = r^2 + (\alpha_0 - 1)\, r + \beta_0$ es el polinomio indicial y como admite una única raíz, tendremos $p(r) = (r - r_1)^2$

Llamando al operador diferencial L, tal que

$$L = x^2 \, \frac{d^2}{dx^2} + x \, \left[\frac{x \, Q(x)}{P(x)} \right] \, \frac{d}{dx} + \left[\frac{x^2 \, R(x)}{P(x)} \right]$$

donde las funciones $\left[\frac{x \, Q(x)}{P(x)} \right]$ y $\left[\frac{x^2 \, R(x)}{P(x)} \right]$ tienen sus desarrollos en serie de Taylor con coeficientes α_j y β_j, respectivamente.

Llamemos

$$y_r(x) = x^r + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \, x^{\ell + r}$$

con la relación para los coeficientes c_ℓ $(\ell = 1, 2, 3 \ldots)$,

$$c_\ell = -\frac{1}{p(\ell + r)} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j} \left[\alpha_j \left(\ell + r - j \right) \right] + \beta_j \right]$$

Si $r = r_1$ (solución de la ecuación indicial) la función propuesta $y_{r_1}(x)$ es solución.

Vamos a reemplazar $y_r(x)$ en la ecuación diferencial y ver qué resulta.

El operador diferencial se puede escribir como

$$L = x^2\,\frac{d^2}{dx^2} + x\,\left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\,x^j\right]\frac{d}{dx} + \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j\,x^j\right]$$

Extrayendo los términos correspondientes a $j = 0$ y agrupando convenientemente, obtenemos

$$L = x^2\,\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_0\,x\,\frac{d}{dx} + \beta_0 + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,x^j\right] x\,\frac{d}{dx} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\,x^j\right]$$

Ahora apliquemos el operador a la función $y_r(x)$

$$L[y_r(x)] = \left\{x^2\,\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_0\,x\,\frac{d}{dx} + \beta_0 + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,x^j\right] x\,\frac{d}{dx} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\,x^j\right]\right\}[y_r(x)]$$

Reemplacemos $y_r(x)$ por la expresión dada y calculemos por separado los términos relevantes:

- $\left\{x^2\,\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_0\,x\,\frac{d}{dx} + \beta_0\right\}[y_r(x)]$:

$$\left\{x^2\,\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_0\,x\,\frac{d}{dx} + \beta_0\right\}\left[x^r + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\,x^{\ell+r}\right] = p(r)x^r + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\,p(\ell+r)\,x^{\ell+r}}_{(*)}$$

- $\left[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,x^j\right] x\,\frac{dy_r(x)}{dx}$:

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,x^j\right] x\,\frac{dy_r(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{\infty} r\,\alpha_j\,x^{j+r} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,c_\ell(\ell+r)x^{\ell+r+j}$$

- $\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\,x^j\right] y_r(x)$:

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,x^j\right] x\,\frac{dy_r(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\,x^{j+r} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\,c_\ell x^{\ell+r+j}$$

Notemos que de la recurrencia de los coeficientes, $c_\ell = -\frac{1}{p(\ell+r)}\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]$, entonces,

$$c_\ell\,p(\ell+r) = -\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]$$

Con esta relación, reemplazando en $(*)$ obtenemos,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\,p(\ell+r)\,x^{\ell+r} = -\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]\,x^{\ell+r}$$

Sumando todos los términos tenemos la acción del operador sobre la función $y_r(x)$

$$
\begin{aligned}
L[y_r(x)] &= p(r)x^r - \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]\,x^{\ell+r} + \sum_{j=1}^{\infty} r\,\alpha_j\,x^{j+r} \\
&+ \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\,c_\ell(\ell+r)x^{\ell+r+j} + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\,x^{j+r} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j\,c_\ell x^{\ell+r+j}
\end{aligned}
$$

reagrupando términos, tenemos

$$
\begin{aligned}
L[y_r(x)] &= p(r)x^r + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}[\alpha_j\,r\ +\beta_j]x^{j+r} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_\ell\,[\alpha_j(\ell+r)+\beta_j]x^{\ell+r+j}}_{(**)} \\
&- \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]\,x^{\ell+r}
\end{aligned}
$$

En la expresión $(**)$ notemos que hemos definido previamente que $c_0 = 1$, por lo que podemos agrupar estos dos términos para comenzar la sumatoria en ℓ desde cero, resultando

$$
\sum_{j=1}^{\infty}[\alpha_j\,r\ +\beta_j]x^{j+r} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_\ell\,[\alpha_j(\ell+r)+\beta_j]x^{\ell+r+j} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_\ell\,[\alpha_j(\ell+r)+\beta_j]x^{\ell+r+j}
$$

Entonces, la expresión del operador se va simplificando,

$$
L[y_r(x)] = p(r)x^r + \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_\ell\,[\alpha_j(\ell+r)+\beta_j]x^{\ell+r+j} - \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]\,x^{\ell+r}
$$

finalmente, si en el último término cambiamos el índice $\ell' = \ell - j$ podemos cambiar el alcance de los índices en la última sumatoria doble con: $\ell' = 0, 1, 2, \ldots$ y $j = 1, 2, \ldots$ resultando, esta última:

$$
\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]\,x^{\ell+r} = \sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{\ell'}[\alpha_j(\ell'+r)+\beta_j]\,x^{\ell'+r+j}
$$

Es más, como el índice es mudo, podemos volver al uso de la letra ℓ, y escribir:

$$
\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}[\alpha_j(\ell+r-j)+\beta_j]\,x^{\ell+r} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{\ell}[\alpha_j(\ell+r)+\beta_j]\,x^{\ell+r+j}
$$

Entonces, la aplicación del operador resulta:

$$
L[y_r(x)] = p(r)x^r + \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_\ell\,[\alpha_j(\ell+r)+\beta_j]x^{\ell+r+j} - \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_\ell[\alpha_j(\ell+r)+\beta_j]\,x^{\ell+r+j}
$$

Es decir,

$$
L[y_r(x)] = p(r)x^r
$$

Esta expresión, que se anula en $r = r_1$ (raíz de la ecuación indicial), puede escribirse como

$$L[y_r(x)] = (r - r_1)^2 \, x^r$$

ya que r_1 es raíz doble del polinomio indicial. Notemos que al derivar con respecto a r también obtenemos la anulación del operador, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial r} L[y_r(x)]\Big|_{r=r_1} = 2(r - r_1)\, x^r + (r - r_1)^2 \, x^r \, \ln|x|\Big|_{r=r_1} = 0$$

Lo que implica que al permutar el orden de derivación, tendremos que

$$L\left[\frac{\partial y_r(x)}{\partial r}\right]_{r=r_1} = 0$$

lo que significa que $\frac{\partial y_r(x)}{\partial r}$ también será una solución.

Entonces, para el caso en que $r_1 = r_2$ la solución general será:

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda_1 \, x^{r_1} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_1)} \, x^\ell \right] + \\ &+ \lambda_2 \left\{ x^{r_1} \, \ln|x| \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_1)} \, x^\ell \right] + x^{r_1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{dc_\ell^{(r_1)}}{dr} \, x^\ell \right\} \end{aligned}$$

4.3 Raíces distintas con $r_2 - r_1 \in \mathbb{Z}$

Para analizar este caso, recordemos la expresión para los coeficientes del desarrollo de $y_r(x)$,

$$y_r(x) = x^r \left[c_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \, x^\ell \right] = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell(r) \, x^{\ell+r}$$

Vamos a poner la dependencia del coeficiente con r a través de una relación funcional, $c_\ell(r)$, en vez del uso del supraíndice. Para $c_0(r)$ teníamos la libertad de definirlo *a priori* como la unidad, y los siguientes coeficientes del desarrollo se obtenían a través de la relación

$$c_\ell(r) = -\frac{1}{p(\ell + r)} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}(r)[\alpha_j(\ell + r - j) + \beta_j]$$

Supongamos que $r_1 < r_2$, con $r_2 - r_1 = n \in \mathbb{N}$. Con esta suposición podemos obtener el desarrollo completo

$$y_{r_2}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell(r_2) \, x^{\ell+r_2}$$

con

$$c_\ell(r_2) = -\frac{1}{p(r_2 + \ell)} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}(r_2)[\alpha_j(\ell + r_2 - j) + \beta_j] \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

y ningún denominador se anula, pueso que $r_2 + \ell$ nunca toma un valor que anule al polinomio indicial.

Claramente los problemas aparecen cuando queremos obtener la serie correspondiente a r_1 ya que los coeficientes del desarrollo

$$c_\ell(r_1) = -\frac{1}{p(r_1+\ell)} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}(r_1)[\alpha_j(\ell + r_1 - j) + \beta_j] \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

pueden ser calculados hasta $\ell = n - 1$ ya que $p(r_1 + n) = p(r_2) = 0$ y por lo tanto $c_0(r_1), c_1(r_1), \ldots, c_{n-1}(r_1)$ pueden ser calculados sin problemas, pero no ocurre lo mismo con el cálculo de $c_n(r_1)$.

Tenemos que

$$p(r+\ell)\, c_\ell(r) = -\sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}(r)[\alpha_j\,(\ell + r - j) + \beta_j] = D_\ell(r)$$

Por otro lado tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} p(r) &= (r - r_1)\,(r - r_2) \\ p(r+n) &= (r + n - r_1)\,(r + n - r_2) = (r - r_1 + n)(r - r_1) \end{aligned}$$

Notemos que si $D_\ell(r)$ tiene como factor a $r - r_1$ resolveríamos la singularidad, ya que

$$p(r+\ell)\, c_\ell(r) = D_\ell(r) = (r - r_1)\, \xi_\ell(r)$$

reemplazando,

$$(r - r_1 + n)(r - r_1)\, c_n(r) = (r - r_1)\, \xi_n(r)$$

entonces,

$$c_n(r) = \frac{\xi_n(r)}{(r - r_1 + n)}$$

expresión que no posee ninguna singularidad en $r = r_1$

Dada la libertad para la elección de $c_0(r_1)$ que termina siendo un factor común dado el cálculo de los $c_\ell(r_1)$ podríamos elegir a $c_0(r) = (r - r_1)$. Esta elección nos garantiza que el $c_n(r_1)$ pueda ser calculado, pero todos los anteriores terminan siendo nulos, ya que $c_0(r_1) = r_1 - r_1 = 0$ y todos los siguientes usan los términos anteriores. Pero esta secuencia nula termina en

$$c_n(r_1) = \frac{\xi_n(r_1)}{(r_1 - r_1 + n)} = \frac{\xi_n(r_1)}{n}$$

y todos los siguientes serán no nulos. Entonces, la serie correspondiente a r_1 comienza con x^n, por lo que la solución correspondiente a r_1 será

$$y_{r_1}(x) = x^{r_1}\, x^n \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell(r_1)\, x^\ell = x^{r_1+n} \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell(r_1)\, x^\ell$$

que es lo mismo que la serie correspondiente a y_2 ya que $r_1 + n = r_2$, esto es

$$y_{r_1}(x) = x^{r_2} \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell(r_1)\, x^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell(r_1)\, x^{\ell+r_2}$$

Y por construcción, termina resultando un múltiplo de la función y_{r_2}.

Lo que obtuvimos entonces es que la única solución independiente es la y_{r_2} y por lo tanto termina siendo un problema análogo al de raíces iguales, es decir que debemos procurar un mecanismo para la obtención de la otra solución.

La segunda solución independiente se obtendrá por derivación con respecto al parámetro r y luego se evalúa en r_2

Considerando la solución para $y_r(x)$ y $c_0(r) = r - r_1$ como

$$y_r(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell(r)\, x^{\ell+r}$$

Al aplicar el operador L a esta solución obtenemos

$$L[y_r(x)] = p(r)(r - r_1)x^r$$

El factor $r - r_1$ aparece porque es factor común al definir $c_0(r) = r - r_1$

Entonces, al derivar con respecto a r obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[L[y_r(x)]\right] = p(r)\, x^r + (r - r_1)p'(r) + (r - r_1)p(r)x^r \ln|x|$$

y claramente se anula en $r = r_1$. Entonces, para obtener la segunda solución independiente a y_{r_2} derivamos con respecto a r la propuesta para y_{r_1} y la evaluemos en $r = r_1$.

Obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[y_{r_1}(x)\right] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_\ell(r)}{dr} x^{\ell+r} + \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell(r) x^{\ell+r} \ln|x|$$

al evaluar en $r = r_1$ la primera sumatoria se no varía, pero la segunda comienza en $\ell = n$ por lo que ya se vio, entonces

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[y_{r_1}(x)\right]_{r=r_1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_\ell(r_1)}{dr} x^{\ell+r_1} + \sum_{\ell=n}^{\infty} c_\ell(r_1) x^{\ell+r_1} \ln|x|$$

con lo que obtenemos la otra solución:

$$y_{r_1}(x) = x^{r_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_\ell(r_1)}{dr} x^\ell + \ln|x|\, x^{r_1+n} \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell(r_1)\, x^\ell$$

y por lo que ya se vio, tenemos que la solución general para el problema será:

$$y(x) = \lambda_2\, y_{r_2}(x) + x^{r_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_\ell(r_1)}{dr} x^\ell + \lambda_1 \ln|x|\, y_{r_2}(x)$$

o bien,

$$y(x) = y_{r_2}(x)\left[\lambda_2 + \lambda_1 \ln|x|\right] + x^{r_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_\ell(r_1)}{dr} x^\ell$$

con λ_1 y λ_2 constantes arbitrarias.

5 Análisis del Punto en el Infinito

En las definiciones que se han dado, tanto para punto ordinario como para puntos singulares regulares, los puntos a estudiar y caracterizar eran finitos, x_0.

A modo de completar la exposición, consideraremos el punto en el infinito ya que es de utilidad para un estudio más general de ecuaciones diferenciales y que son de aplicación para las definiciones de las denominadas *funciones especiales*, entre las que se encuentran las *Funciones Hipergeométricas, Polinomios de Jacobi*, etc.

La extensión es simplemente hacer un cambio de variables, $\zeta = \frac{1}{x}$ y estudiar la ecuación diferencial en el punto $\zeta = 0$.

Entonces, estudiemos la ecuación diferencial

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) = 0$$

pero en la variable $\zeta = \frac{1}{x}$ Tenemos que

$$\frac{dy}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta^2}\, y'(x) \quad \rightarrow \quad y'(x) = -\zeta^2 \frac{dy}{d\zeta}$$

y

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \frac{2}{\zeta^3}\, y'(x) + \frac{1}{\zeta^4}\, y''(x) \quad \rightarrow \quad y''(x) = \zeta^4 \frac{d^2y}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{dy}{d\zeta}$$

Reemplazando, tenemos

$$P\left(\frac{1}{\zeta}\right) \left[\zeta^4 \frac{d^2y}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{dy}{d\zeta}\right] + Q\left(\frac{1}{\zeta}\right) \left[-\zeta^2 \frac{dy}{d\zeta}\right] + R\left(\frac{1}{\zeta}\right) y\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0$$

Agrupando,

$$\zeta^4\, P\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d^2y}{d\zeta^2} + \left[2\zeta\, P\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \zeta^2 \; Q\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] \frac{dy}{d\zeta} + R\left(\frac{1}{\zeta}\right) y\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0$$

Para simplificar la notación llamemos $\overline{P}(\zeta) = P\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\overline{Q}(\zeta) = Q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\overline{R}(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ y $\overline{y}(\zeta) = y\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Con esta notación, escribimos

$$\zeta^4\, \overline{P}(\zeta) \frac{d^2\overline{y}(\zeta)}{d\zeta^2} + \left[2\zeta\, \overline{P}(\zeta) - \zeta^2 \; \overline{Q}(\zeta)\right] \frac{d\overline{y}(\zeta)}{d\zeta} + \overline{R}(\zeta)\, \overline{y}(\zeta) = 0$$

Entonces, podemos escribir

$$\frac{d^2\overline{y}(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\overline{P}(\zeta)} \left[\frac{2}{\zeta^3}\, \overline{P}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^2}\, \overline{Q}(\zeta)\right] \frac{d\overline{y}(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta^4} \frac{\overline{R}(\zeta)}{\overline{P}(\zeta)}\, \overline{y}(\zeta) = 0$$

Reescrita de esta manera, podemos decir entonces que el punto en el infinito es un punto ordinario si las funciones

$$\frac{1}{\overline{P}(\zeta)} \left[\frac{2}{\zeta^3}\, \overline{P}(\zeta) - \frac{1}{\zeta^2}\, \overline{Q}(\zeta)\right] \quad y \quad \frac{1}{\zeta^4} \frac{\overline{R}(\zeta)}{\overline{P}(\zeta)}$$

son analíticas en $\zeta = 0$ y el punto en el infinito es singular regular si las funciones

$$\frac{1}{\overline{P}(\zeta)} \left[\frac{2}{\zeta^2}\, \overline{P}(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\, \overline{Q}(\zeta)\right] \quad y \quad \frac{1}{\zeta^2} \frac{\overline{R}(\zeta)}{\overline{P}(\zeta)}$$

son analíticas en $\zeta = 0$

6 Bibliografía recomendada

[1] Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)

[2] Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)

[3] Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física, Universidade de São Paulo. (2005)

[2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)

[3] Deaño Cabrera, Alfredo. *Tesis Doctoral*, Universidad Carlos III, Madrid, España (2006)

[4] Slater, Lucy J. *Generalized Hypergeometric Functions*, Ed. Cambridge University Press (1966)