Transformada de Fourier

1. Introducción. Motivación

Las series de Fourier pueden ser interpretadas como la representación de las funciones en sus componentes periódicas. Esto es, en *armónicos*.

Dada una función en el intervalo $[-L, L]$ cada coeficiente de Fourier es la ampitud del armónico asociado a una frecuencia determinada,

$$\omega_\ell = \frac{\pi}{L}\,\ell$$

Además, es importante enfatizar que la serie de Fourier extiende de manera periódica a la función, inicialmente sólo definida en $[-L, L]$.

El problema que queremos discutir ahora es la obtención de frecuencias que componen una determinada función, pero definida en toda la recta real.

2. Forma Compleja y Salto al Continuo

Consideremos una función cuadrado integrable en el intervalo $[-L, L]$. Al estudiar las series de Fourier, hemos hallado su expresión e compleja

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell\, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x}$$

con

$$c_\ell = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t}\, dt$$

Vamos, de manera heurística, a construir la *Transformada de Fourier* extendiendo el intervalo $[-L, L]$ a toda la recta real y pasando de la sumatoria a la integral.

Para este propósito consideremos el paso de las sumas de Riemann a la integral

$$\sum_\ell f(x_\ell)\,\Delta x_\ell \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Para ello, comencemos con la expresión

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell\, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_\ell}{\Delta\ell}\, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x}\,\Delta\ell$$

Es más, siempre $\Delta\ell = 1$ ya que así varía en la sumatoria!

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell\, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_\ell}{\Delta\ell}\, e^{i\frac{\ell\pi}{L}x}\,\Delta\ell$$

con

$$c_\ell = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t}\, dt$$

llamemos $\omega = \frac{\pi \ell}{L}$. Entonces, ω varía conforme lo hace ℓ, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$ (y como $\Delta\ell = 1 \to \Delta\omega \cdot L = \pi$)

Entonces, usando el cambio de variables

$$f(x) = \sum_{\frac{L}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} \frac{c_\omega}{\Delta\omega} e^{i\omega x}\, \Delta\omega = \sum_{\frac{L}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} c_\omega \frac{L}{\pi} e^{i\omega x}\, \Delta\omega$$

Como una suma de Riemann, pasamos a la integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega)\, L}{\pi}\, e^{i\,\omega\, x}\, d\omega$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega)\, L}{\pi}\, e^{i\,\omega\, x}\, d\omega$$

con

$$\frac{c(\omega)\, L}{\pi} = \frac{L}{\pi}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt$$

Lo único que falta es tomar límite para $L \to \infty$ el cual es necesario incluso para pasar de la suma de Riemann a la integral (ya que si $\Delta\,\omega \to 0$ debemos tener $L \to \infty$ para que el producto de siempre π)

Tomando entonces límite para L tendiendo a infinito, obtenemos la denominada *Integral de Fourier*.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\, x}\, d\omega$$

con

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt$$

A partir de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\, x}\, d\omega$$

la función

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega\, t}\, dt$$

es la llamada *Transformada de Fourier*.

2.1. Ejemplos de Transformada de Fourier

A partir de la definición, obtengamos las transformadas de Fourier de algunas funciones:
Ejemplo. Sea

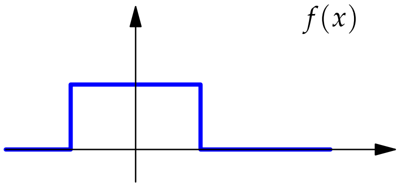
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -x \in [-a, a] \\ 0 & x \notin [-a, a] \end{cases}$$

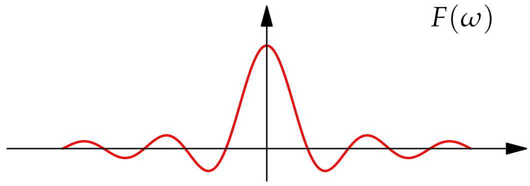
entonces,

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\, t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega\, t}\, dt = \frac{(-1)}{i\omega}\, e^{-i\omega\, t}\Big|_{-a}^{a} = \frac{a}{\pi}\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}$$

que es la función llamada *seno amplitud*.

Gráficamente,





2.2. Ejemplos de Transformada de Fourier

Dada una función $f(t)$, la transformada de Fourier es definida también como $\mathcal{F}[f(t)]$

$$\mathcal{F}\,[f(t)] = F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\, VP\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt\right\}$$

A partir de la definición, se puede confeccionar la siguiente tabla.

Función	**Transformada**
$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{2\pi}$
1	$\delta(\omega)$
$\operatorname{sen}(\omega_0\, t)$	$\frac{1}{2\,i}\,[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$\cos(\omega_0\, t)$	$\frac{1}{2}\,[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$e^{-at}u_0(t)\ (a>0)$	$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{a+i\omega}$
$e^{-a\,\|t\|}$	$\frac{a}{\pi}\,\frac{1}{a^2+\omega^2}$
$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[-a,a]\\ 0 & x\notin[-a,a]\end{cases}$	$\frac{a}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen}(a\,\omega)}{a\,\omega}$

2.3. Propiedades Básicas

A partir de la definición, es posible demostrar las siguientes propiedades

Función	**Transformada**
$f(t)$	$F(\omega)$
$g(t)$	$G(\omega)$
$\lambda f(t)+g(t)$	$\lambda F(\omega)+G(\omega)$
$f(a\,t)$	$\frac{1}{\|a\|}\,F(\frac{\omega}{a}$
$f(t-a)$	$e^{i\omega}F(\omega)$
$e^{i\,a\,t}f(t)$	$F(\omega-a)$
$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$
$(-i\,t)f(t)$	$\frac{dF(\omega)}{d\omega}$
$(f*g)(t)$	$F(\omega)\,G(\omega)$
$f(t)\,g(t)$	$\frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$

Donde el producto $(f*g)$ es el de convolución

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\, g(t-\eta)\, d\eta$$

3. La Integral de Fourier

Con la Transformada de Fourier, pudimos expresar

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\,\omega\, t}\, d\omega$$

Además, reemplazando la expresión para la transformada de Fourier,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, e^{-i\omega\, t'}\, dt' \right\} e^{i\,\omega\, t}\, d\omega$$

Agrupando, tenemos,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, e^{i\omega\,(t-t')}\, dt'\, d\omega$$

Por identificación de la distribución delta de Dirac, podemos asociar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\,(t-t')}\, d\omega = 2\pi\, \delta(t-t')$$

Con esta identificación,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, 2\pi\, \delta(t-t')\, dt' = f(t)$$

La expresión desde la cual partimos,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, e^{-i\omega\, t'}\, dt' \right\} e^{i\,\omega\, t}\, d\omega$$

es la denominada *Integral de Fourier*.

4. Otra formulación: Transformada Coseno y Seno

Escribamos la serie de Fourier, definida para una función periódica en el intervalo $[-L, L]$ en la forma

$$f(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

En virtud de la paridad de la función coseno, podemos escribir

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell\, =\, -\infty \\ (\ell\, \neq\, 0)}}^{\infty} \cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right]$$

Entonces, podemos escribir:

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

A partir de

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\left\{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \cos\left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x)\right]\right\} dt$$

consideremos $\omega = \frac{\pi}{L}\ell$, entonces, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$

De manera análoga a lo hecho para la obtención de la integral de Fourier, y teniendo en cuenta la paridad (con respecto a la variable ω del coseno) podemos llegar a la expresión, tomando el límite al continuo

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\cos[\omega(t-x)]\,dt\right\} d\omega$$

o, asumiendo la convergencia de las integrales impropias

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\cos(\omega t)\,dt\right\}\cos(\omega x)\,d\omega \\ &+ \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\sin(\omega t)\,dt\right\}\sin(\omega x)\,d\omega \end{aligned}$$

En general, llegamos a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\cos(\omega t)\,dt\right\}\cos(\omega x)\,d\omega \\ &+ \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\sin(\omega t)\,dt\right\}\sin(\omega x)\,d\omega \end{aligned}$$

Si la función es par, la parte correspondiente a la integral de seno se anula, por lo que podemos escribir (usando la paridad)

$$f(x) = \int_0^\infty \left\{\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\,\cos(\omega t)\,dt\right\}\cos(\omega x)\,d\omega$$

Si la función es impar, la parte correspondiente a la integral de coseno se anula,

$$f(x) = \int_0^\infty \left\{\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\,\sin(\omega t)\,dt\right\}\sin(\omega x)\,d\omega$$

4.1. Transformada Coseno y Transformada Seno de Fourier

Si la función es par

$$f(x) = \int_0^\infty F_c(\omega)\,\cos(\omega x)\,d\omega$$

donde define la Transformada Coseno

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\,\cos(\omega t)\,dt$$

Si la función es impar

$$f(x) = \int_0^\infty F_s(\omega)\,\sin(\omega x)\,d\omega$$

donde define la Transformada Seno

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\,\sin(\omega t)\,dt$$

Ejemplo. Obtener la Transformada Coseno para la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Como la función es par, podemos obtener la transformada coseno, que resulta inmediatamente de calculo directo

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$$

Entonces, en virtud de la Integral de Fourier, podemos escribir

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\,\cos(\omega x)\,d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Ejemplo. Obtener el valor de la siguiente integral impropia.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a\,x)\,\cos(b\,x)}{x}\,dx$$

Habíamos calculado en el ejemplo anterior

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\,\cos(\omega x)\,d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Podemos escribir cambiando adecuadamente las variables

$$\int_0^\infty \frac{2}{\pi}\frac{\sin(a\,x)}{x}\,\cos(b\,x)\,dx = \begin{cases} 1 & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

o bien

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a\,x)\,\cos(b\,x)}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

Que además, nos permite obtener, para $a = 1$ y $b = 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

4.2. Identidades de Parseval

La identidad de Parseval hallada para los coeficientes de Fourier, para una base infinita,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\langle\vec{v}|\mathbf{e}_\ell\rangle^2}{\|\mathbf{e}_\ell\|^2} = \|\vec{v}\|^2$$

tiene su correlato en el marco de la transformada de Fourier

En efecto, con el producto interno definido como

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g^*(u) du$$

donde g está conjugada: Es el producto interno complejo.

Calculemos,

$$\langle F(\omega)|G(\omega)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega$$

reemplazando por la definición de la transformada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'}\, dt' \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) e^{i\omega t}\, dt \right\} d\omega$$

entonces,

$$\langle F(\omega)|G(\omega)\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g^*(t)\, e^{i\omega(t-t')}\, d\omega\, dt'\, dt$$

$$\langle F(\omega)|G(\omega)\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, dt' \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)\, dt \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}\, d\omega \right\}$$

entonces,

$$\langle F(\omega)|G(\omega)\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, dt' \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)\, dt \left\{ 2\pi\delta(t-t') \right\}$$

Aplicando entonces la propiedad de la delta de Dirac,

$$\langle F(\omega)|G(\omega)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, g^*(t')\, dt' = \frac{1}{2\pi} \langle f|g\rangle$$

Entonces, si consideramos la misma función, tenemos,

$$\|f(t)\|^2 = 2\pi \|F(\omega)\|^2$$

junto con

$$\langle f(t)|g(t)\rangle = 2\pi\, \langle F(\omega)|G(\omega)\rangle$$

constituyen las denominadas *identidades de Parseval.*

En el caso de las transformadas seno y coseno, también podemos obtener las identidades de Parseval.

En el caso de la Transformada coseno, calculemos

$$\int_{0}^{\infty} F_c(\omega)\, G_c(\omega)\, d\omega = \int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(t')\, \cos(\omega\, t')\, dt' \right\} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} g(t)\, \cos(\omega\, t)\, dt \right\} d\omega$$

Entonces,

$$\int_{0}^{\infty} F_c(\omega)\, G_c(\omega)\, d\omega = \frac{4}{\pi^2} \int_{0}^{\infty} f(t') \int_{0}^{\infty} g(t) \int_{0}^{\infty} \frac{\{\cos[\omega(t+t')] + \cos[\omega(t-t')]\}}{2}\, d\omega\, dt'\, dt$$

Expresando los cosenos de manera exponencial, tenemos

$$\int_0^\infty F_c(\omega)\, G_c(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty f(t')dt' \int_0^\infty g(t)dt \int_0^\infty \left\{ e^{i\omega[t-(-t')]} + e^{-i\omega[t-(-t')]} + e^{i\omega(t-t')} + e^{-i\omega(t-t')} \right\} d\omega$$

Integrando en ω

$$\int_0^\infty F_c(\omega)\, G_c(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty f(t')dt' \int_0^\infty g(t)\pi \left\{ \delta[t-(-t')] + \delta[(-t')-t] + \delta(t-t') + \delta(t'-t) \right\} dt$$

Aplicando las propiedades de la delta de Dirac y la paridad de la función g,

$$\int_0^\infty F_c(\omega)\, G_c(\omega)\, d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(t')g(t')dt'$$

Análogamente,

$$\int_0^\infty F_s(\omega)\, G_s(\omega)\, d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty f(t')g(t')dt'$$

Aplicación. Calcular

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(\omega)}{\omega^2}\, d\omega$$

Para calcular esta integral, podemos ver que es la norma al cuadrado de la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} \pi & x \in [-1,1] \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Entonces, a partir del resultado

$$\|f(t)\|^2 = 2\pi \|F(\omega)\|^2$$

tenemos

$$\|f(t)\|^2 = 2\pi \left\| \frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega} \right\|^2$$

o bien,

$$\int_{-1}^1 \pi^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(\omega)}{\omega^2}\, d\omega$$

Entonces,

$$2\pi^2 = 2\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(\omega)}{\omega^2}\, d\omega$$

con lo cual

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(\omega)}{\omega^2}\, d\omega = \pi$$

5. Bibliografía Recomendada

- Kreider, D.; Kuller, R.; Ostberg, D.; Perkins, F. *Introducción al Análisis Lineal*, Tomos I y II, Fondo Educativo Interamericano (1971)
- Churchill, Ruel V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones Diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014) http://sedici.unlp.edu.ar (en esta página buscar por autor)
- Balanzat, Manuel *Matemática Avanzada para la Física*, Ed. EUDEBA. Cuarta Edición (1994).