

Transformada de Laplace

Elementos Básicos

1. Introducción. Transformaciones Integrales

En este capítulo estudiaremos los fundamentos básicos de la *Transformada de Laplace*. Este tipo de transformación si bien tiene su origen en la teoría de probabilidades, su aplicación para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias -principalmente en la teoría de circuitos eléctricos- se la debe al ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925).

Antes de definir la transformada de Laplace, vamos a definir más generalmente lo que vamos a entender por *Transformada Integral*.

Dada una función $f(t)$ integrable en el intervalo $[a, b]$, vamos a definir una nueva función $F(s)$, a partir de

$$F(s) = \int_a^b f(t) K(s, t) dt$$

Donde $K(s, t)$ es una función integrable en la variable t . Por como está definida la transformación, es decir, a partir del calculo de una integral, decimos que $F(s)$ es una *transformación integral* de la función $f(t)$.

2. Transformada de Laplace

Consideremos una función $f(t)$ integrable en el intervalo $[0, \infty)$, definimos la *Transformada de Laplace* a una nueva función (en la variable s) definida a través de la relación

$$F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

cuando la integral converge.

Ejemplos

▪

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

▪

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

▪

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$

▪

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

▪

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

3. Condición de Existencia: Funciones de orden Exponencial

Definición. Una función f es de orden exponencial si existen constantes α , M y T (M y T , positivas) tales que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \text{para } t \geq T$$

Ejemplos

▪

$$|t| \leq e^t$$

▪

$$|a t + b| \leq |a| |t| + |b| \leq (|a| + |b|) e^t$$

▪

$$|A \cos(\omega t)| \leq |A| e^t$$

Para la determinación de la condición es de utilidad graficar las funciones

Teorema: Si f es de orden exponencial, entonces $\mathcal{L}[f]$ existe para $s > a$.

4. Propiedades

Llamando $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, se cumple:

▪ Linealidad:

$$\mathcal{L}[\lambda f + g] = \lambda F(s) + G(s)$$

▪ Teorema de Traslación en el eje s :

$$\mathcal{L}[f(t) e^{at}] = F(s - a)$$

▪ Transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0)$$

▪ Transformada de una derivada n -ésima:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

▪ Derivada n -ésima de una Transformada:

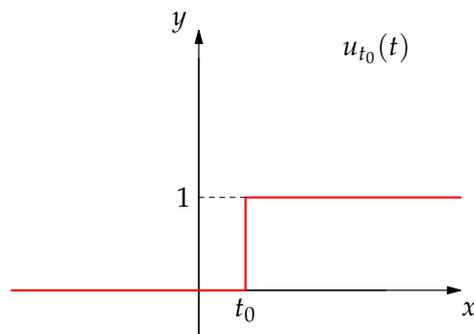
$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [F(s)]$$

5. Función de Heaviside o escalón

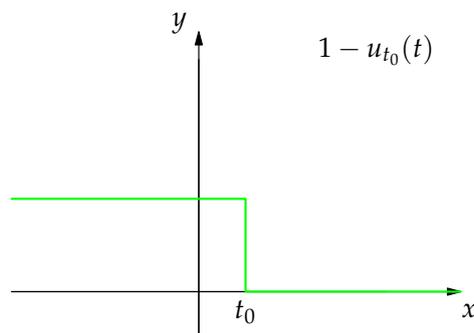
Definición. La función escalón o de Heaviside está definida como

$$u_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Notemos que la función $u_{t_0}(t)$ modeliza un encendido abrupto en $t = t_0$

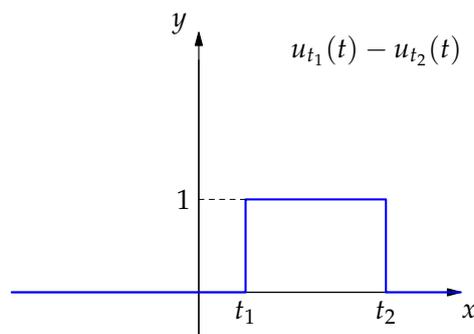


Además, podemos ver que la función $1 - u_{t_0}(t)$ modeliza un apagado abrupto en $t = t_0$



Ejercitación: Construir una función *pulso rectangular* y una *función escalera* usando las funciones de Heaviside

Respuesta: (Pulso cuadrado)



Teorema de Traslación temporal

$$\mathcal{L}[u_{t_0}(t) f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

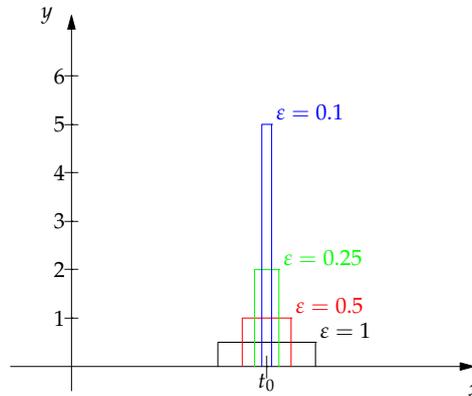
6. La Delta de Dirac

Consideremos la función pulso cuadrado centrado en $t = t_0$ de ancho ε

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[u_{t_0 - \frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0 + \frac{\varepsilon}{2}}(t) \right]$$

Notemos que esta función tiene altura $\frac{1}{\varepsilon}$ y ancho ε . Entonces, el área encerrada será siempre la unidad.

Si ε se va haciendo más pequeño, la altura va creciendo, conforme el ancho va disminuyendo, con área unidad.



Vamos a definir la distribución delta de Dirac como

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[u_{t_0 - \frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0 + \frac{\varepsilon}{2}}(t) \right]$$

Es importante aclarar que no es la única definición de la delta de Dirac, sino que hay otras, dependiendo de las condiciones que se impongan.

La delta de Dirac no es considerada una función, sino una *distribución* o *función generalizada*.

6.1. Propiedades de la Distribución Delta de Dirac

Dada la definición -a través del límite- de la distribución delta de Dirac, se cumplen las siguiente propiedades:

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt_0 = 1$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

- $$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Demostremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(u_{t_0 - \frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0 + \frac{\varepsilon}{2}}(t) \right) \right] dt$$

entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left(u_{t_0 - \frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0 + \frac{\varepsilon}{2}}(t) \right) f(t) dt$$

el pulso cuadrado es no nulo en el intervalo $[t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + \frac{\varepsilon}{2}]$ con lo cual la integral se simplifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\varepsilon}{2}} f(t)dt$$

Si $F(t)$ es la primitiva de $f(t)$ tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) - F(t_0 - \frac{\varepsilon}{2})}{\varepsilon} = \frac{dF}{dt}(t_0) = f(t_0)$$

A partir de esta demostración podemos demostrar la primera, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \delta(t - t_0)dt = 1$$

En general, podemos probar también

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1 & t_0 \in [a, b] \\ 0 & t_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

6.2. La Transformada de Laplace de la Delta de Dirac

La distribución $\delta(t - t_0)$ no es una función, sino una función generalizada. Por lo tanto no puede ser de orden exponencial, las cuales tienen garantizada la existencia de la transformada de Laplace. De todas maneras, la condición de orden exponencial es una condición suficiente, no necesaria. Esto nos permite buscar, a través del proceso de límite, la transformada de la distribución $\delta(t - t_0)$.

Consideremos $t \neq 0$. Entonces, podemos calcular

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

Ahora, como la distribución es nula siempre que no sea el punto t_0 , podemos escribir,

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u_{t_0}(t)\delta(t - t_0) e^{-st} dt$$

entonces,

$$\int_0^{\infty} u_{t_0}(t)\delta(t - t_0) e^{-st} dt = \mathcal{L}[u_{t_0}(t)\delta(t - t_0)] = e^{-st_0}$$

Por aplicación del teorema de la traslación temporal, podemos identificar que

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

6.3. Relación entre la función escalón y la Delta de Dirac

Calculemos la transformada de Laplace de la derivada de la función de Heaviside (hipotéticamente)

$$\mathcal{L}\left[\frac{du_{t_0}(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{du_{t_0}(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Si integramos por partes

$$\mathcal{L} \left[\frac{du_{t_0}(t)}{dt} \right] = u_{t_0}(t) e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty u_{t_0}(t) e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

Entonces, por identificación tendremos:

$$\frac{du_{t_0}(t)}{dt} = \delta(t - t_0)$$

lo que en principio tiene sentido, ya que la función escalón tiene pendiente nula siempre, excepto donde no tiene derivada (por no ser continua) pero que si pudieramos asociarle un número, este sería infinito.

La teoría de distribuciones permite dar sentido a cosas que en la teoría clásica de funciones no lo tendrían: En este caso, pudimos "calcular" una derivada de una función discontinua.

7. Noción de Convulación

Cuando se analiza una determinada señal, se debe tener en cuenta que el proceso mismo del análisis es una respuesta al estímulo (señal), mediada por un dispositivo que la interpreta.

Muy intuitivamente, la observación humana del fenómeno es a través de la salida del dispositivo creado y diseñado para tal fin. De hecho, un gráfico de un electrocardiograma es la salida del osciloscopio, que interpreta los impulsos que sufre el corazón.

Esquemáticamente, podríamos representar:



Tanto el estímulo como la interpretación serán funciones.

Entonces, el aparato receptor lo que hace es toma una función $E(t)$ (estímulo) y devuelve una función $I(t)$ (interpretación). Si llamamos \hat{R} a la operación que hace el aparato, el esquema puede ser reformulado

$$E(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{R}[E(t)]} \quad \rightarrow \quad I(t)$$

7.1. Dispositivos Lineales e Invariantes Temporales (LTI)

La interpretación que un dispositivo hará de una determinada señal dependerá del tipo de dispositivo. Vamos a considerar un tipo de dispositivo denominado *Lineal e invariante temporal*, o LTI de su sigla en inglés *Linear Time-Invariant*

Esta hipótesis, tiene su correlato algebraico:

- **Lineal:**

$$\lambda E_1(t) + E_2(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{R}[\lambda E_1(t) + E_2(t)]} \quad \rightarrow \quad \lambda I_1(t) + I_2(t)$$

- **Invarianza Temporal:**

$$E(t - t_0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{R}[E(t - t_0)]} \quad \rightarrow \quad I(t - t_0)$$

7.1.1. La función del dispositivo

Consideremos que el dispositivo tiene una respuesta a un impulso instantáneo -caracterizado por la $\delta(t)$ - a través de una función determinada, $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \hat{R}[\delta(t)]$$

esta función $\varphi(t)$ podríamos llamarla *función del dispositivo*.

7.2. Definición de Convolución

Consideremos una señal caracterizada por la función $E(t)$. Por la definición de la distribución $\delta(t)$ podemos escribir

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Si esta función estímulo es receptada por el dispositivo, la interpretación $I(t)$ vendrá dada por la expresión

$$I(t) = \hat{R}[E(t)] = \hat{R} \left[\int_{-\infty}^{\infty} E(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right]$$

Si aplicamos la linealidad (en un sentido extenso, en la suma continua que es la integral) podemos escribir:

$$I(t) = \hat{R}[E(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau) \hat{R}[\delta(t - \tau)] d\tau$$

Ahora, usando la invarianza temporal, podemos escribir

$$\hat{R}[\delta(t - \tau)] = \varphi(t - \tau)$$

Entonces, llegamos a

$$I(t) = \hat{R}[E(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$$

Definición de Producto de Convolución. Sean f y g funciones cuadrado integrables en la recta real. Se define el producto de convolución como

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Con esta definición podemos afirmar que la interpretación que un dispositivo receptor hace de una señal es la convolución entre la señal y la función del dispositivo.

En en contexto de la Transformada de Laplace, las funciones están definidas en $[0, \infty)$ por lo que el producto de convolución, sólo en este contexto será definido a través de la relación

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

7.3. Transformada de la Convolución

Consideremos $F(s) = \mathcal{L}[f]$, $G(s) = \mathcal{L}[g]$. Entonces

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s) G(s)$$

Demostración.

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} (f * g)(t) e^{-st} dt$$

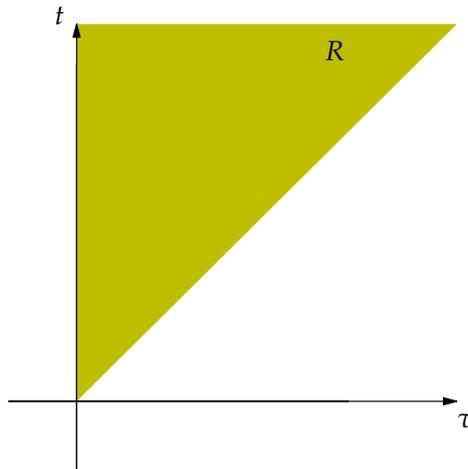
Reemplazando el producto de convolución, tenemos

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

o lo que puede escribirse como una integral doble

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) e^{-st} d\tau dt$$

vista como una integral doble, veamos que el recinto de integración es el que se muestra en la siguiente figura.



Esta región puede reparametrizarse como $\tau \leq t < \infty$ y $0 \leq \tau < \infty$. Entonces, podemos reescribir la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) e^{-st} dt d\tau$$

Si cambiamos la variable, $\eta = t - \tau$ podemos escribir

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) g(\eta) e^{-s(\eta+\tau)} d\eta d\tau$$

Las que pueden ser separadas,

$$\mathcal{L}[f * g] = \left[\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] \cdot \left[\int_0^{\infty} g(\eta) e^{-s\eta} d\eta \right] = F(s) G(s)$$

como se quería demostrar.

8. Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

La propiedad

$$\mathcal{L}[y'] = sF(s) - y(0)$$

junto con la linealidad nos permite resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. En efecto, consideremos la ecuación

$$y' - 2y = 1, \quad y(0) = 1$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros, tenemos,

$$\mathcal{L}[y' - 2y] = \mathcal{L}[1]$$

aplicando la linealidad y la transformada de la derivada, tenemos

$$\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = sF(s) - y(0) - 2F(s) = \frac{1}{s} \quad (\mathcal{L}[1] = 1/s)$$

Entonces como $y(0) = 1$,

$$(s - 2)F(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s + 1}{s}$$

o bien,

$$F(s) = \frac{s + 1}{s(s - 2)} = \frac{1}{s - 2} + \frac{1}{s(s - 2)}$$

Podemos notar que $\frac{1}{s-2}$ es la transformada de Laplace de e^{2t} y veamos

$$\frac{1}{s(s - 2)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s - 2}$$

Al ser un producto de transformadas de Laplace, podemos asumir que proviene de la convolución de dos funciones, las que tienen como transformadas a $\frac{1}{s}$ (que es la función 1) y $\frac{1}{s-2}$ (que es e^{2t}). Entonces, la función cuya transformada es $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-2}$ será

$$(e^{2t} * 1)(t) = \int_0^t e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} [e^{2t} - 1]$$

finalmente, la solución del problema será

$$y(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} [e^{2t} - 1] = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$$

Se verifica directamente que es solución de la ecuación diferencial.

Consideremos ahora una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

transformando a ambos miembros, tenemos

$$\underbrace{s^2 F(s) - sy(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}[y'']} - 2 \underbrace{[sF(s) - y(0)]}_{\mathcal{L}[y']} + F(s) = 0$$

reemplazando las condiciones iniciales, tenemos,

$$(s^2 - 2s + 1)F(s) - 1 = 0, \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Para buscar la función $y(t)$ cuya transformada da $F(s)$ podemos notar que

$$\frac{1}{(s-1)^2} = (-1) \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s-1} \right]$$

Entonces, tendremos que, a partir de la propiedad

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [F(s)]$$

Podemos afirmar que, como,

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}, \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[te^t] = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Entonces, la solución del problema será

$$y(t) = te^t$$

8.1. Ecuaciones Integro-diferenciales

Una de las aplicaciones del teorema de la convolución es la aplicación a ecuaciones integro-diferenciales, es decir, a ecuaciones en las cuales la función incógnita aparece tanto derivada, como así también en integrales.

Consideremos la ecuación

$$y' + \int_0^t y(\tau) g(t-\tau) d\tau = f(t)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros, debemos tomar en cuenta que la integral que aparece es el producto de convolución entre la función incógnita y la función g .

Como ejemplo, consideremos la ecuación integro-diferencial

$$y' + \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t-\tau) d\tau = 0$$

Al aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros tenemos

$$\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L} \left[\int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t-\tau) d\tau \right] = \mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y(t) * \operatorname{sen}(t)] = 0$$

Entonces,

$$sF(s) - y(0) + F(s) \frac{1}{s^2 + 1} = 0$$

y luego despejamos $F(s)$ para ver de qué función $y(t)$ provino esta transformada $F(s)$.

9. Transformada Inversa de Laplace

Nuestro abordaje de la Transformada de Laplace es básicamente a los efectos de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Como hemos visto, la metodología era la siguiente: Dada la ecuación diferencial,

- Efectuar la Transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación
- Obtener la expresión de $F(s)$ resolviendo la ecuación algebraica resultante
- Identificar la función $y(t)$ cuya Transformada de Laplace sea la que obtuvimos, $F(s)$.

Este procedimiento requiere conocer muchas funciones con su transformada, además de aplicar las propiedades.

Sin embargo, por razones de completitud es necesario expresar como se efectúa *Transformada Inversa de Laplace*. De manera de que la búsqueda de la función $y(t)$ no sea mirando tablas, sino a partir de un cálculo directo.

El problema consiste, entonces, en hallar una transformación, que denotaremos \mathcal{L}^{-1} tal que al aplicarla a una transformada de Laplace $F(s)$ nos da como resultado la función $f(t)$, cuya transformada es $F(s)$.

$$\text{Si } \mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad \text{entonces} \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

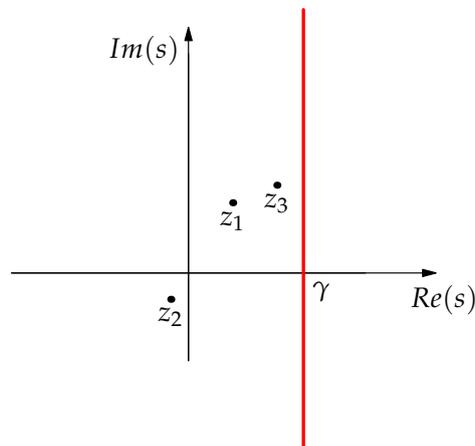
El método de obtención de la Transformada Inversa de Laplace es a partir de la expresión propuesta de Bromwich (Thomas John l'Anson Bromwich, 1875-1929)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} VP \left[\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds \right] \quad (t > 0)$$

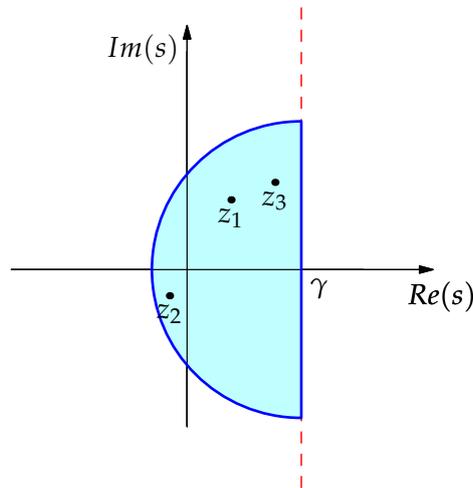
es decir, el valor principal de la integral impropia. γ es un número real, ubicado de tal manera que sea mayor que la parte real de todas las singularidades de la función $F(s)$, en el plano complejo s .

Esto significa que la integral se efectúa a lo largo de la recta $Re(s) = \gamma$

Supongamos que la función $F(s)$ tiene las singularidades z_1 , z_2 y z_3 . Entonces, gráficamente,



Para efectuar esta integral podemos definir una curva cerrada que contenga a las singularidades z_1 , z_2 y z_3 en su interior, como indica la figura



Entonces, la integral de Bromwich la calculamos tomando la curva que es una recta $c_1 : s_1(t) = \gamma + it$, con $-a \leq t \leq a$, unida con la semicircunferencia $c_2 : s_2(t) = a e^{it} + \gamma$ con $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$.

Para calcular la integral aplicamos el *Teorema de los Residuos* y luego tomamos límite para a tendiendo a infinito. Como en el caso del cálculo de integrales impropias, habrá que demostrar que la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero.

Ejemplo. Con la integral de Bromwich obtener la antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{1}{s}$. A partir de la integral de Bromwich, tenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{s} ds$$

Podemos elegir $\gamma = 1$ y al construir la curva cerrada la singularidad será $s = 0$. Entonces, el residuo de la función integrando será $e^{0t} = 1$.

Entonces,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[2\pi i \cdot \text{Res}_{s=0} \left(\frac{e^{st}}{s} \right) \right] = 1$$

Como ya sabíamos. Queda como ejercicio demostrar que la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero en el límite.

10. Bibliografía Recomendada

- Boyce, William E.; DiPrima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Ed. Limusa (1991)
- Kreider, D.; Kuller, R.; Ostberg, D.; Perkins, F. *Introducción al Análisis Lineal*, Tomo I, Fondo Educativo Interamericano (1971)
- Churchill, Ruel V., Brown, James W. *Variable Compleja y Aplicaciones*, Ed. Mc Graw Hill (1992)