Elementos de la Teoría de Sturm-Liouville

1. Introducción

En este material estudiaremos problemas de contorno, es decir, a diferencia de problemas de valores iniciales, en este caso estudiaremos ecuaciones diferenciales en las cuales las condiciones de las funciones serán sobre los extremos del intervalo.

El origen de la teoría puede encontrarse en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, donde las condiciones son impuestas sobre la frontera de los conjuntos que estamos estudiando. Por eso también se los denominan problemas de valores en la frontera. En particular, el problema que dio lugar a la teoría es la ecuación diferencial que describe el transporte de calor en una barra, con condiciones en los extremos.

1.1. El Problema de la conducción del Calor

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < \alpha \in \mathbb{R}$$

con las condiciones de contorno

$$\psi\,(-L,t) = 0, \qquad \psi\,(L,t) = 0 \qquad \psi\,(x,0) = f(x)$$

Esta ecuación modeliza la temperatura en una barra homogénea unidimensional de longitud $2L$ (ubicada en el eje x, desde $x = -L$ a $x = L$. La constante α es la conductividad términa.

Proponiendo una solución de la forma

$$\psi(x,t) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(t),$$

la ecuación diferencial se escribe

$$\psi_1''(x)\,\psi_2(t) = \frac{1}{\alpha^2}\,\psi_1(x)\,\psi_2'(t).$$

Dividiendo a ambos miembros por la función $\psi = \psi_1\,\psi_2$ tenemos

$$\frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\psi_2'(t)}{\psi_2(t)}$$

Como a ambos lados de la igualdad tenemos funciones que sólo dependen de la variable indicada, entonces cada cociente debe ser una constante, sino esta propiedad no se satisfacería. Entonces, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \psi_1''(x) &= \lambda\,\psi_1(x) \\ \psi_2'(t) &= \lambda\,\frac{1}{\alpha^2}\,\psi_2(t) \end{aligned}$$

La primera ecuación diferencial:

$$\psi_1''(x) = \lambda\,\psi_1(x)$$

admite las siguientes situaciones:

a) $\lambda > 0$, esto es, $\lambda = \omega^2$

b) $\lambda < 0$, esto es, $\lambda = -\omega^2$

c) $\lambda = 0$

Resolvamos para el caso b). La solución general será:

$$\psi_1(x) = c_1\ \cos(\omega\, x) + c_2\ \text{sen}(\omega\, x)$$

Imponiendo las condiciones de borde, tenemos

$$\begin{aligned} c_1\ \cos(\omega\, L) - c_2\ \text{sen}(\omega\, L) &= 0 \\ c_1\ \cos(\omega\, L) + c_2\ \text{sen}(\omega\, L) &= 0 \end{aligned}$$

sumando y restando a ambos miembros, tenemos:

$$2\, c_1\ \cos(\omega\, L) = 0, \qquad\qquad 2\, c_2\ \text{sen}(\omega\, L) = 0$$

entonces, para $c_1 = 0$

$$\omega\, L = k\,\pi \qquad\quad k \in \mathbb{Z}$$

entonces,

$$\omega = \frac{k\,\pi}{L}.$$

Notemos que ω no es constante, sino que es múltiplo de π/L. Además, $c_2 = 0$.

Entonces, para cada valor de k tenemos que será solución, por lo que el *principio de superposición* establece que

$$\psi_1(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\ \text{sen}\left(\ell\,\frac{\pi}{L} x\right)$$

también será solución.

Para la parte espacial, tendremos:

$$\psi_2(t) = a_\ell e^{-\frac{\ell^2\pi^2}{\alpha^2 L^2}\, t}$$

Entonces, el producto será

$$\psi(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell\, e^{-\frac{\ell^2\pi^2}{\alpha^2 L^2}\, t}\ \text{sen}\left(\ell\,\frac{\pi}{L} x\right)$$

Además, en $t = 0$ tenemos $\psi(x,0) = f(x)$ por lo que

$$\psi(x,0) = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell\ \text{sen}\left(\ell\,\frac{\pi}{L} x\right)$$

Entonces, los coeficientes se determinarán por el desarrollo de Fourier, esto es:

$$b_\ell = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x^*)\ \text{sen}\left(\ell\,\frac{\pi}{L} x^*\right) dx^*$$

Para esta ecuación del calor, con las condiciones de contorno establecidas, podemos puntualizar los siguientes resultados, para la parte $\psi_1(x)$

- La ecuación en la variable x es una ecuación de autovalores
$$\psi''_{1k}(x) = \lambda_k \, \psi_{1\,k}(x)$$
- Los autovalores son infinitos y siguen una sucesión creciente,
$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$$
- Las autofunciones forman una base ortogonal

Estas propiedades evidentes para este problema particular se enmarcan en un conjunto de propiedades que no son exclusivas del problema de la conducción de calor, sino que forman parte de un conjunto de propiedades de la *Teoría de Sturm-Liouville*.

En el caso en que la barra no sea homogénea, la parte espacial (es decir, de la dependencia con x) satisface la ecuación diferencial de la forma:
$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx}[\psi_1(x)]\right] + q(x)\,\psi_1(x) = \lambda\, r(x)\,\psi_1(x)$$
El problema analizado es el correspondiente a $p(x) = 1$; $q(x) = 0$ y $r(x) = 1$.

2. El problema de Sturm-Liouville

Consideremos la ecuación diferencial de *Sturm-Liouville*
$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx}[\psi(x)]\right] + q(x)\,\psi(x) = \lambda\, r(x)\,\psi(x)$$
en la cual vamos a considerar que

- $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$
- $p(x)$ no se anula en el intervalo $[a, b]$
- $p(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$

Podemos notar que una ecuación diferencial de la forma
$$y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$$
puede escribirse en la forma de Sturm-Liouville, tomando
$$p(x) = e^{\int a(x)\,dx}, \qquad q(x) = -b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}, \qquad r(x) = 0$$
Si las funciones $a(x)$ y $b(x)$ son analíticas, tenemos garantizada la existencia y unicidad para las condiciones
$$y(c) = y_0, \qquad y'(c) = y'_0, \qquad a \le c \le b$$
Las condiciones de contorno que vamos a condiderar son las siguiente:

I) De Dirichlet:
$$y(a) = y(b) = 0$$

II) De Neumann
$$y'(a) = y'(b) = 0$$

III) De Robin
$$a_1\,y(a) + a_2\,y'(a) = 0, \qquad a_b\,y(b) + b_2\,y'(b) = 0$$

2.1. El Operador de Sturm-Liouville

En el marco de la teoría de operadores, definimos el operador lineal $L : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}^2$, esto es, funciones con derivadas segundas continuas.

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx}[\ ]\right] + q(x)$$

es decir,

$$L[y] = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)\,y(x)$$

Si en el espacio de funciones definimos el producto interno

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(\eta)\,g(\eta)\,d\eta$$

entonces, calculemos

$$\langle L[f]|g\rangle = \int_a^b L[f(\eta)]\,g(\eta)\,d\eta$$

$$\langle L[f]|g\rangle = \int_a^b \left\{-\frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{dy}{d\eta}\right] + q(\eta)\,y(\eta)\right\} g(\eta)\,d\eta$$

$$\langle L[f]|g\rangle = -\int_a^b \frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{df}{d\eta}\right] g(\eta)\,d\eta + \int_a^b q(\eta)\,f(\eta)\,g(\eta)\,d\eta$$

Integrando por partes la primera intergral:

$$\int_a^b \frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{df}{d\eta}\right] g(\eta)\,d\eta = p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta}g(\eta)\Big|_a^b - \int_a^b p(\eta)\,\frac{df}{d\eta}\frac{dg}{d\eta}\,d\eta$$

equivalentemente,

$$\int_a^b \frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{df}{d\eta}\right] g(\eta)\,d\eta = p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta}g(\eta)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{df}{d\eta}\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\,d\eta$$

haciendo partes nuevamente, podemos escribir:

$$\int_a^b \frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{df}{d\eta}\right] g(\eta)\,d\eta = p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta}g(\eta)\Big|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\Big|_a^b + \int_a^b f(\eta)\,\left[\frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\right]\right]\,d\eta$$

Entonces, podemos escribir:

$$\langle L[f]|g\rangle = -\left\{p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta}g(\eta)\Big|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\Big|_a^b + \int_a^b f(\eta)\,\left[\frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\right]\right]\,d\eta\right\} + \int_a^b q(\eta)\,f(\eta)\,g(\eta)\,d\eta$$

agrupando,

$$\langle L[f]|g\rangle = -\left\{p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta}g(\eta)\Big|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\Big|_a^b\right\} + \int_a^b f(\eta)\,\left[-\left[\frac{d}{d\eta}\left[p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\right] + q(\eta)\,g(\eta)\right]\right]\,d\eta$$

entonces,

$$\langle L[f]|g\rangle = -\left\{ p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta} g(\eta)\bigg|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\bigg|_a^b \right\} + \langle f|L[g]\rangle$$

o, equivalentemente

$$\langle L[f]|g\rangle - \langle f|L[g]\rangle = -\left\{ p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta} g(\eta)\bigg|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\bigg|_a^b \right\}$$

o

$$\int_a^b \left(L[f]\,g(\eta) - f(\eta)\,L[g] \right) d\eta = -\left\{ p(\eta)\,\frac{df(\eta)}{d\eta} g(\eta)\bigg|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\bigg|_a^b \right\}$$

conocida como *identidad de Green.*

El miembro de la derecha,

$$\left\{ p(\eta)\,\frac{df}{d\eta} g(\eta)\bigg|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\bigg|_a^b \right\},$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} \left\{ p(\eta)\,\frac{df}{d\eta} g(\eta)\bigg|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\bigg|_a^b \right\} &= \left[p(b)\,\frac{df(b)}{d\eta} g(b) - p(a)\,\frac{df(a)}{d\eta} g(a) \right] \\ &- \left[f(b)\,p(b)\,\frac{dg(b)}{d\eta} - f(a)\,p(a)\,\frac{dg(a)}{d\eta} \right] \end{aligned}$$

Si consideramos las condiciones de contorno de Robin, tenemos:

$$\frac{df(a)}{d\eta} = -\frac{a_1}{a_2} f(a), \qquad \frac{df(b)}{d\eta} = -\frac{b_1}{b_2} f(b)$$

y lo mismo para g. Entonces, reemplazando, tenemos

$$\begin{aligned} \left\{ p(\eta)\,\frac{df}{d\eta} g(\eta)\bigg|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\bigg|_a^b \right\} &= \left[-p(b)\,\frac{b_1}{b_2} f(b)g(b) + p(a)\,\frac{a_1}{a_2} f(a)g(a) \right] \\ &- \left[-f(b)\,p(b)\,\frac{b_1}{b_2} g(b) + f(a)\,p(a)\,\frac{a_1}{a_2} g(a) \right] \end{aligned}$$

entonces,

$$\left\{ p(\eta)\,\frac{df}{d\eta} g(\eta)\bigg|_a^b - f(\eta)\,p(\eta)\,\frac{dg}{d\eta}\bigg|_a^b \right\} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\int_a^b \left(L[f]\,g(\eta) - f(\eta)\,L[g] \right) d\eta = \langle L[f] \mid g\rangle - \langle f \mid L[g]\rangle = 0$$

Lo que implica que el operador de Sturm-Liouville es *Hermítico* o *Autoadjunto*,

$$\langle L[f] \mid g\rangle = \langle f \mid L[g]\rangle.$$

2.2. Autovalores del operador Sturm-Liouville

Dado el operador de Sturm-Liouville,

$$L[y] = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y$$

y habiendo comprobado que para el producto iterno

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(\eta)\,g^*(\eta)\,d\eta$$

es Hermítico, podemos comprobar que:

I) *Los autovalores del operador son reales.*

En efecto, sea $\vec{v}$ un autovector de un operador hermítico. Tenemos

$$\langle L[\vec{v}]|\vec{v}\rangle = \langle \vec{v}|L[\vec{v}]\rangle$$
$$\lambda\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle = \lambda^*\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle$$
$$(\lambda-\lambda^*)\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle = 0$$

y como $\|\vec{v}\|^2 > 0$, se sigue que $\lambda = \lambda^*$ con lo que λ debe ser real.

II) *Autovectores asociados a distintos autovalores son ortogonales.*

Consideremos $\vec{v}$ y $\vec{w}$ autovectores de L, asociados con diferentes autolavores, λ_1 y λ_2. Entonces,

$$\langle L[\vec{v}]|\vec{w}\rangle = \langle \vec{v}|L[\vec{w}]\rangle$$

entonces,

$$\lambda_1\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle = \lambda_2\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle$$

entonces,

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle = 0$$

y como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ se sigue que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

Estas propiedades son importantes, pero surgen las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas autofunciones tiene el operador de Sturm-Liouville?
- ¿Existe una base de autofunciones?

La primera pregunta está asociada a la cantidad de autovalores del operador, ya que para autovalores distintos, tenemos vectores ortogonales, de la cantidad de autovalores podremos inferir la cantidad de autofunciones.

Para responder la segunda pregunta, es necesario elementos de Análisis Funcional y está fuera del alcance de este curso. Sin embargo, la respuesta no será impuesta, sino construida, aunque falten detalles de las demostraciones.

En el camino de construir las respuestas a estas preguntas, es necesario hacer un estudio de las funciones solución de la ecuación de Sturm-Liouville, ahora como ecuación diferencial.

3. Teoremas de Sturm

Los *Teoremas de Sturm* son un conjunto de resultados que construyen las respuestas a las preguntas del punto anterior. En general, son propiedades de las funciones solución a la ecuación diferencial de Sturm-Liouville.

3.1. El Teorema de Separación

Este Teorema afirma que los ceros de las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville están alternados.

Teorema de separación. *Sean y_1 e y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right]+q(x)\,y=0$$

con $p(x)$ y $q(x)$ continuas. Entonces, si x_1 y x_2 son ceros consecutivos de y_1, entonces existe x_3, raíz de y_2, con $x_1 < x_3 < x_2$. Es decir, los ceros de las funciones están alternados.

Demostración. Las soluciones linealmente independientes satisfacen que el Wronskiano es distinto de cero:

$$W(y_1,y_2)=y_1(x)\,y_2'(x)-y_1'(x)\,y_2(x)\neq 0$$

Consideremos, además, que el signo es positivo. Sean x_1 y x_2 ceros de y_1, entonces, evaluando el Wronskiano en x_1 y x_2 tenemos,

$$\begin{aligned}
y_1(x_1)\,y_2'(x_1)-y_1'(x_1)\,y_2(x_1) &= -y_1'(x_1)\,y_2(x_1)>0\\
y_1(x_2)\,y_2'(x_2)-y_1'(x_2)\,y_2(x_2) &= -y_1'(x_2)\,y_2(x_2)>0
\end{aligned}$$

Además, las derivadas de y_1 en x_1 y x_2 deben necesariamente tener signos distintos (por ser ceros consecutivos). Entonces, como el Wronskiano no cambia de signo, tendremos

$$y_2(x_1)\cdot y_2(x_2)<0$$

Entonces en el intervalo $[x_1,x_2]$ cambió de signo, por lo cual, debe tener un cero en el interior de este intervalo.

Si además ahora estudiamos qué ocurre entre dos ceros consecutivos de $y_2(x)$ tendremos que existirá un cero de y_1 entre ellos. Con esto, se concluye que los ceros de las funciones están alternados.

3.2. Teorema de Comparación

El *Teorema de comparación de Sturm*, también llamado *Teorema Fundamental* compara los ceros de funciones solución de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right]+q_1(x)\,y &= 0\\
-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right]+q_2(x)\,y &= 0
\end{aligned}$$

es decir, con mismo $p(x)$, pero diferentes funciones $q(x)$.

Teorema de comparación. *Sean f y g soluciones reales no triviales de las ecuaciones*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\right] + q_1(x)\,f &= 0 \\ -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dg}{dx}\right] + q_2(x)\,g &= 0 \end{aligned}$$

con $p(x)$, $p'(x)$, $q_1(x)$ y $q_2(x)$ continuas, $p(x) > 0$ y $q_2(x) < q_1(x)$, para todo x. Entonces, si $x_1 < x_2$ son ceros consecutivos de f, entonces $g(x)$ se anula al menos una vez en (x_1, x_2).

Demostración. A partir de las ecuaciones cuyas soluciones son las funciones f y g, podemos multiplicar la primera ecuación por g y la segunda por f y restar la segunda con la primera, obteniendo:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\right]\,g(x) - \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dg}{dx}\right]\,f(x) = (q_1(x) - q_2(x))f(x)\,g(x)$$

Además, podemos escribir:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\right]\,g(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\,g(x)\right] - p(x)\,\frac{df}{dx}\,\frac{dg}{dx}$$

y lo análogo para el otro término. Entonces,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\right]\,g(x) - \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dg}{dx}\right]\,f(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\,g(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dg}{dx}\,f(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\right]\,g(x) - \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dg}{dx}\right]\,f(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\,g(x) - p(x)\,\frac{dg}{dx}\,f(x)\right]$$

Entonces podemos escribir

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\,g(x) - p(x)\,\frac{dg}{dx}\,f(x)\right] = (q_1(x) - q_2(x))f(x)\,g(x)$$

Integremos a ambos miembros entre x_1 y x_2 que son los ceros consecutivos de f

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{df}{dx}\,g(x) - p(x)\,\frac{dg}{dx}\,f(x)\right]dx = \int_{x_1}^{x_2} (q_1(x) - q_2(x))f(x)\,g(x)\,dx$$

como x_1 y x_2 son ceros de f, podemos escribir entonces

$$p(x_2)\,\frac{df(x_2)}{dx}\,g(x_2) - p(x_1)\,\frac{df(x_1)}{dx}\,g(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (q_1(x) - q_2(x))f(x)\,g(x)\,dx$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f es positiva en el intervalo. Supongamos que g también es positiva en el intervalo. Entonces, tenemos que por hipótesis $q_1(x) < q_2(x)$, por lo que la integral

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_1(x) - q_2(x))f(x)\,g(x)\,dx > 0$$

Además, si f es positiva en el intervalo y x_1 y x_2 son ceros consecutivos,

$$\frac{df(x_1)}{dx} > 0, \qquad\qquad \frac{df(x_2)}{dx} < 0$$

Entonces, si g es siempre positiva en (x_1, x_2) entonces tendremos que

$$p(x_2)\,\frac{df(x_2)}{dx}\,g(x_2) - p(x_1)\,\frac{df(x_1)}{dx}\,g(x_1) < 0$$

con lo cual llegamos a una contradicción, ya que el término de la derecha es positivo. Luego, $g(x)$ debe cambiar de signo en el intervalo.

Este teorema de comparación, es generalizado cambiando no sólo $q(x)$, sino también la función $p(x)$ y se dedica a la distribución de ceros de las funciones solución. Para ver estos teoremas se recomienda el libro de Ince (Ince, E. L. *Ordinary differential equations*).

4. Soluciones Oscilatorias y no Oscilatorias

Otro resultado importante en el marco de la teoría es la determinación de soluciones oscilatorias.

Consideremos el problema

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = 0$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\,y = 0$$

en el intervalo $[a, b]$.
Dada la continuidad de las funciones, podemos considerar que tanto $p(x)$ y $q(x)$ están acotadas superior e inferiormente (p es positiva, pero no imponemos lo mismo para q, por lo cual admite cota inferior negativa)

$$\begin{array}{rcccl} 0 \leq m_p & \leq & p(x) & \leq & M_p \\ m_q & \leq & q(x) & \leq & M_q \end{array}$$

Para aplicar el teorema de comparación, consideremos primero el problema asociado

$$\frac{d}{dx}\left[m_p\,\frac{dy}{dx}\right] - m_q\,y = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{m_q}{m_p}\,y = 0$$

Los casos posibles son, a saber:

- Si $m_q > 0$ el problema tiene como solución

$$y(x) = e^{\sqrt{\frac{m_q}{m_p}}x}$$

  que no tiene ceros en (a, b). El caso $m_q = 0$ es análogo.

- Si $m_q < 0$ el problema tiene como solución

$$y(x) = \text{sen}\left(\sqrt{-\frac{m_q}{m_p}}x\right)$$

Esta función es oscilatoria y la distancia entre dos ceros consecutivos será

$$x_2 - x_1 = \pi\sqrt{-\frac{m_p}{m_q}}$$

Para el caso oscilatorio, si

$$b - a \leq \pi\sqrt{-\frac{m_p}{m_q}}$$

no habrá ceros el intervalo. Entonces, podemos concluir que si

$$-\frac{m_q}{m_p} < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

no habrá soluciones oscilatorias para el problema original,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\,y = 0$$

ya que estamos aplicando el teorema de comparación.

Consideremos la segunda comparación, hecha con cotas superiores

$$\frac{d}{dx}\left[M_p\,\frac{dy}{dx}\right] - M_q\,y = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{M_q}{M_p}\,y = 0$$

Al aplicar el teorema de comparación, la ecuación original oscilará al menos tan rápidamente como esta última ecuación. Si $M_q < 0$ habrá oscilaciones y la distancia entre dos ceros consecutivos será

$$x_2' - x_1' = \pi\sqrt{-\frac{M_p}{M_q}}$$

Con esto, se sigue que una condición suficiente para que las soluciones del problema original tengan al menos n ceros en (a, b) es que

$$n\pi\sqrt{-\frac{M_p}{M_q}} < b - a$$

o, equivalentemente

$$-\frac{M_q}{M_p} < \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

5. Estudio de autovalores del operador de Sturm-Liouville

Consideremos la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) - \lambda\, r(x)]y = 0$$

Por el teorema de comparación, podemos notar que si tenemos dos autovalores λ_1 y λ_2, tales que $\lambda_1 < \lambda_2$ tendremos que al comparar las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) - \lambda_1\, r(x)]y &= 0 \\ -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) - \lambda_2\, r(x)]y &= 0 \end{aligned}$$

tendrá más ceros en el intervalo $[a, b]$ la asociada al autovalor λ_2.

Consideremos para los siguientes lemas, las siguientes condiciones:

- La ecuación de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$ vamos a considerarla de la siguiente forma:
  $$y'' - [q(x) - \lambda\, r(x)]y = 0$$
  con las condiciones $y(a) = y(b) = 0$ (Dirichlet)
- Vamos a definir una función $N(\lambda)$ que consiste en el número de ceros de la función solución en el intervalo $(a, b]$, asociada al número λ.

Lema. *Para la ecuación de Sturm-Liouville con condiciones de Dirichlet se cumple:*

i) *Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ implica que $N(\lambda_1) \leq N(\lambda_2)$*

ii) *$N(\lambda)$ tiene una discontinuidad en $\lambda = \lambda_2$.*

Demostración. La demostración es una aplicación directa del teorema de comparación. En efecto, si $\lambda_1 < \lambda_2$ tendremos que

$$[q(x) - \lambda_2\, r(x)] < [q(x) - \lambda_1\, r(x)]$$

entonces,

$$y_2'' - [q(x) - \lambda_2\, r(x)]y_2 = 0$$

tiene más ceros en (a, b) que la asociada a λ_1,

$$y_1'' - [q(x) - \lambda_1\, r(x)]y_1 = 0$$

Con lo cual, podemos afirmar,

$$N(\lambda_1) \leq N(\lambda_2)$$

Además, como estamos en el caso de condiciones de Dirichlet, tenemos que $y_2(b) = 0$, entonces la asociada a λ_2 tiene un cero más, con lo cual

$$N(\lambda_1) \leq N(\lambda_2) - 1 \qquad \rightarrow \qquad N(\lambda_2) - N(\lambda_1) \geq 1$$

Lo que implica que si λ_1 tiende a λ_2 la diferencia no tiende a cero, por lo que no hay continuidad. Entonces, el lema queda probado.

Analicemos el siguiente resultado.

Lema. *Bajo las hipótesis del lema anterior, se cumple*

I) $0 \in N(\mathbb{R})$. *Esto es, el nulo es parte de la imagen de* $N(\lambda)$.

II) $\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda) = \infty$

Demostración. I) Habíamos demostrado que si $q(x) - \lambda r(x) \geq 0$ la solución era exponencial real, por lo cual no tenía ceros. esto es $N(\lambda) = 0$.

II) Si λ es tal que

$$q(x) - \lambda r(x) \geq \frac{n^2\pi^2}{b-a}$$

entonces, $y_\lambda(x)$ tiene como mínimo n ceros en $[a, b]$, con lo cual $N(\lambda) \geq n$. Entonces, como es una cota superior, tendremos que el límite tiende a infinito.

Lema. *Para un dado* λ, N *es continua a la derecha de* λ. *Además,* λ *es una discontinuidad de* $N(\lambda)$ *si y sólo si* $y_\lambda(b) = 0$, *en ese caso, se tiene*

$$N(\lambda) - \lim_{\lambda'\to\lambda} N(\lambda') = 1$$

Demostración. Comencemos con $N(\lambda) = 0$, para todo λ. Esta es una función continua.

Supongamos, entonces, que $N(\lambda) = n > 0$ y sean

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leq b, \qquad y_\lambda(x_j) = 0$$

y_λ es solución de

$$y''_\lambda - [q(x) - \lambda\, r(x)]y_{\lambda=0}$$

Como $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$, $y'(x_3) \neq 0$ ... $y'(x_m) \neq 0$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que si llamamos

$$C_j = \{x \in [a, b] : \quad |x - x_j| < \delta\}, \qquad C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m \qquad M = [a, b] - C$$

entonces, tendremos que se cumple $x \in C$,

$$|y'_\lambda(x)| > \varepsilon$$

Esto se desprende de la continuidad de la derivada, y'_λ. Además, si consideramos que $y_\lambda(b) \neq 0$, tendremos que $x_m \neq b$.

Consideremos

$$\varepsilon_1 = \inf_{x\in M}\{\, |y'_\lambda(x)|\,\}$$

Por la continuidad y derivabilidad de la derivada respecto al parámetro λ podemos afirmar que existe un número $r > 0$ si

$$|\lambda_1 - \lambda_2| < r \qquad \to \qquad |y_{\lambda_1}(x) - y_{\lambda_2}(x)| < \varepsilon_1 \ \wedge \ |y'_{\lambda_1}(x) - y'_{\lambda_2}(x)| < \varepsilon$$

Para un dado λ_2, se cumple que si $x \in [a, b] - C$ entonces $y_{\lambda_2}(x) \neq 0$ y tiene el mismo signo que $y_{\lambda_1}(x)$. Además, y_{λ_2} tiene a lo sumo un cero en cada uno de los C_j ya que los y_{λ_2} no se anula en C.

Entonces, $y_{\lambda_2}(x)$ se anula exactamente una vez en cada C_j. Esto significa que

$$m - 1 \leq N(\lambda_2) \leq m$$

Entonces, por el primer lema demostrado que $N(\lambda)$ es continua a derecha y

$$N(\lambda_1) - \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1^-} N(\lambda_2) = 1$$

Si además, $y_{\lambda_1}(b) = 0$ tenemos que existe también un cero de y_{λ_2} en C_m. Entonces, $N(\lambda_2) = m$ resultando N continua en λ.

Con los lemas anteriores se puede afirmar que los puntos de discontinuidad de N forman una sucesión infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \cdots$ con las siguientes propiedades:

i) Si $\lambda < \lambda_1$, entonces y_λ no se anula en $(a, b]$

ii) Para $n \geq 1$, si $\lambda_{n-1} < \lambda < \lambda_n$ entonces y_λ tiene n ceros en (a, b), además $y_\lambda(b) \neq 0$.

iii) Para todo $n \geq 0$, y_{λ_n} tiene exactamente n ceros en (a, b) y además $y_{\lambda_n}(b) = 0$

iv) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$

Con los lemas anteriores podemos demostrar

Teorema. *Los autovalores del problema de Sturm-Liouville*

$$y'' - [q(x) - \lambda\, r(x)] = 0$$

$$y(a) = y(b) = 0$$

forman una sucesión creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

Demostración. Por los lemas anteriores se sigue que los autovalores del problema son las discontinuidades de $N(\lambda)$ y las autofunciones son las $y_n(x)$.

Nota: Los lemas y el teorema demostrado fueron para un tipo particular de ecuación de Sturm-Liouville,

$$y'' - [q(x) - \lambda\, r(x)] = 0$$

Ahora, si queremos estudiar el problema general, dado por la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - [q(x) - \lambda\, r(x)]y = 0$$

Podemos cambiar la variable independiente

$$\xi = \int_a^x \frac{d\eta}{p(\eta)}$$

con este cambio de variable, tenemos

$$d\xi = \frac{1}{p(x)}dx, \qquad \text{entonces} \qquad \frac{d}{dx} = \frac{1}{p(x)}\frac{d}{d\xi}$$

La ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - [q(x) - \lambda\, r(x)]y = \frac{1}{p(x)}\frac{d}{d\xi}\left[p(x)\frac{1}{p(x)}\frac{dy}{d\xi}\right] - [q(x) - \lambda\, r(x)]y = 0$$

Es decir, en la variable ξ, la ecuación diferencial la podemos escribir

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - [q_2(\xi) - \lambda\, r_2(\xi)]\, y = 0, \qquad\qquad (q_2 = p(x)\, q(x), \quad r_2 = p(x)\, r(x))$$

es decir, en la forma que hemos estudiado el problema de los autovalores.

6. Desarrollos en autofunciones del Operador de Sturm-Liouville

Los resultados precedentes afirman que el operador de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

admiten una sucesión infinita, creciente de autovalores λ_ℓ, para la ecuación

$$L[y_\ell] = \lambda_\ell\, r(x)\, y_\ell$$

Es decir, con función *peso* $r(x)$.

Para el caso en que la función peso $r(x) = 1$, tenemos que las autofunciones y_ℓ son además ortogonales para el producto interno

$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

Con esta definición de producto interno, el operador era autoadjunto, por lo que las autofunciones asociadas a autovalores distintos eran ortogonales.

Con estos resultados, tendremos que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$$

es un conjunto infinito y ortogonal.

Aplicando resultados del Análisis Funcional, se puede afirmar que este conjunto forma una base completa, por lo que cualquier función continua a trozos en $[a,b]$ puede desarrollarse de manera análoga a lo que se vió para series de Fourier.

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\langle f \mid y_\ell \rangle}{\|y_\ell\|^2}\, y_\ell(x)$$

Además, todos los resultados válidos para el desarrollo de la teoría de las Series de Fourier son válidos.

7. Ortogonalidad con función peso $r(x)$

En el caso en que la función $r(x) \neq 1$, tendremos que el problema de autovalores será

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = \lambda\, r(x)\, y$$

Para este caso, si el producto interno lo definimos como

$$\langle f \mid g \rangle_r = \int_a^b f(t)\, r(t)\, g(t)\, dt$$

es decir, con una función peso, $r(x)$.

Para este producto interno, el operador de Sturm-Liouville sigue siendo autoadjunto,

$$\langle L[f] \mid g \rangle_r = \langle f \mid L[g] \rangle_r$$

Con lo cual, con las autofunciones podemos definir una base para el espacio de funiones continuas a trozos en $[a,b]$.

8. El Problema Inhomogéneo. La Función de Green

Con la teoría desarrollada para el problema de Sturm-Liouville homogéneo, consideremos ahora el problema

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = f(x)$$

en el intervalo $[a,b]$, con las condiciones de contorno de Robin

$$a_1\, y(a) + a_2\, y'(a) = 0$$

$$b_1\, y(b) + b_2\, y'(b) = 0$$

Para la resolución de este problema, consideremos la función de dos variables

$$G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

que satisface

$$L_x[G(x,x')] = \delta(x - x')$$

y las condiciones de contorno (en la variable x)

$$a_1\, G(a, x') + a_2\, \frac{\partial G(a, x')}{\partial x} = 0$$

$$b_1\, G(b, x') + b_2\, \frac{\partial G(b, x')}{\partial x} = 0$$

con estas características para la función G, podemos notar que la solución para el problema inhomogéneo será

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')\, f(x')\, dx'$$

En efecto, si aplicamos el operador de Sturm-Liouville a ambos miembros tenemos

$$L[y] = L\left[\int_a^b G(x, x')\, f(x')\, dx'\right]$$

Ahora, como el operador sólo deriva en la variable x, podemos aplicar el operador dentro de la integral,

$$L[y] = \int_a^b L[G(x, x')]\, f(x')\, dx'$$

Entonces,

$$L[y] = \int_a^b \delta(x' - x)\, f(x')\, dx' = f(x)$$

Es decir, la solución del problema. Esta función $G(x, x')$ es la denominada <u>*Función de Green*</u>.

Además, al imponer que la función de Green satisfaga las condiciones de contorno, tendremos

$$\begin{aligned} a_1\, y(a) + a_2\, y'(a) &= a_1 \int_a^b G(a, x')\, f(x')\, dx' + a_2 \int_a^b \frac{\partial G(a, x')}{\partial x}\, f(x')\, dx' \\ &= \int_a^b \left[a_1\, G(a, x') + a_2\, \frac{\partial G(a, x')}{\partial x}\right] f(x')\, dx' = \int_a^b 0 \cdot f(x')\, dx' = 0 \end{aligned}$$

Y lo mismo para el extremo b.

8.1. Construcción de la Función de Green

Dado el problema de Sturm-liouville homogéneo

$$L[y] = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\, \frac{dy}{dx}\right] + q(x)\, y = 0$$

Por el Teorema de existencia y unicidad, tenemos que existen dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ las cuales satisfacen las condiciones de Robin por separado

$$a_1\, y_1(a) + a_2\, y_1'(a) = 0$$

$$b_1\, y_2(b) + b_2\, y_2'(b) = 0$$

Esto nos permite proponer la Función de Green como

$$G(x,x') = \begin{cases} c_1(x')\,y_1(x) & a \le x < x' \\ c_2(x')\,y_2(x) & x' < x \le b \end{cases}$$

Para la determinación de las funciones $c_1(x')$ y $c_2(x')$ debemos hacer uso de la propiedad de la función de Green, esto es,

$$L[G(x,x')] = \delta(x'-x)$$

Esta propiedad es equivalente a

$$\int_a^b L[G(x,x')]\,dx = 1$$

Efectuemos el cálculo de la integral de la siguiente manera:

$$\int_a^b L[G(x,x')]\,dx = \int_a^{x'-\varepsilon} L[G(x,x')]\,dx + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} L[G(x,x')]\,dx + \int_{x'+\varepsilon}^{b} L[G(x,x')]\,dx = 1$$

Por la definición de la delta de Dirac, las integrales de los extremos son nulas, por lo cual

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} L[G(x,x')]\,dx = 1$$

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right] + q(x)\,G(x,x') \right\} dx = 1$$

Dada la continuidad de la función $q(x)$ y al imponer la continuidad de $G(x,x')$ en $x = x'$), al tomar límite para $\varepsilon \to 0$, tendremos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x)\,G(x,x')\,dx = 0$$

Entonces, lo que debe ocurrir es

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right] \right\} dx = 1$$

Notemos que la integración es trivial, ya que estamos integrando una derivada. Entonces,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[p(x)\,\frac{\partial G(x,x')}{\partial x}\right]\Bigg|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} = -1$$

En virtud de la continuidad de $p(x)$, el miembro de la izquierda se puede escribir:

$$p(x')\left[\frac{\partial G(x'^{+},x')}{\partial x} - \frac{\partial G(x'^{-},x')}{\partial x}\right] = -1$$

lo que implica que la derivada de la función de Green tiene una discontinuidad en $x = x'$ de salto $-1/p(x')$

Con estas características para la función de Green y en virtud de la propuesta hecha para la representación de la misma, tendremos que

$$\begin{aligned} c_1(x')y_1(x') - c_2(x')y_2(x') &= 0 && \text{(continuidad de la función)} \\ c_1(x')y_1'(x') - c_2(x')y_2'(x') &= \frac{1}{p(x')} && \text{(discontinuidad de la derivada)} \end{aligned}$$

Las funciones que eran desconocidas, $c_1(x')$ y $c_2(x')$ pueden ser halladas ahora resolviendo este sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Del cálculo directo, obtenemos:

$$\begin{aligned} c_1(x') &= -\frac{y_2(x')}{p(x')\,W[y_1(x'),y_2(x')]} \\ c_2(x') &= -\frac{y_1(x')}{p(x')\,W[y_1(x'),y_2(x')]} \end{aligned}$$

donde

$$W[y_1(x'),y_2(x')] = y_1(x')\,y_2'(x') - y_1'(x')\,y_2(x')$$

es el Wronskiano de las funciones y_1 e y_2, el cual es no nulo puesto que las funciones son linealmente independientes.

Entonces, la función de Green es

$$G(x,x') = \frac{(-1)}{p(x')\,W[y_1,y_2](x')} \begin{cases} y_2(x')\,y_1(x) & a \le x < x' \\ \\ y_1(x')\,y_2(x) & x' < x \le b \end{cases}$$

Cada operador de Sturm-Liouville tendrá su función de Green asociada, la cual luego servirá para cualquier problema inhomogéneo, ya que la solución será

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')\,f(x')\,dx'$$

donde $f(x')$ es la inhomogeneidad.

Ejemplo 1. Hallar la función de Green para el operador de Sturm-Liouville

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

con $y(a)=0$ e $y(b)=0$

En este caso, $p(x)=-1$ y $q(x)=0$.

Las soluciones de la homogénea serán

$$y_1(x) = x-a, \qquad y_2(x) = x-b$$

El Wronskiano será:

$$W[y_1,y_2] = y_1\,y_2' - y_1'\,y_2 = (x-a)-(x-b) = b-a$$

Con esto, tenemos la función de Green

$$G(x,x') = \frac{1}{b-a} \begin{cases} (x'-b)\,(x-a) & a \le x < x' \\ \\ (x'-a)\,(x-b) & x' < x \le b \end{cases}$$

Ejemplo 2. Hallar la función de Green para el operador:

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \omega_0^2$$

Con las condiciones

$$y(a) = 0, \qquad y(b) = 0$$

En este caso, $p(x) = -1$ y $q(x) = \omega_0^2$.

Las funciones solución de la homogénea que satisfacen en los extremos del intervalo las condiciones de contorno serán

$$y_1(x) = \text{sen}[\omega_0(x-a)], \qquad y_2(x) = \text{sen}[\omega_0(x-b)]$$

El Wronskiano

$$W[y_1, y_2] = \omega_0\{\text{sen}[\omega_0(x-a)]\cos[\omega_0(x-b) - \cos[\omega_0(x-a)]\,\text{sen}[\omega_0(x-b)]\} = \omega_0\ \text{sen}[\omega_0(b-a)]$$

Entonces, la función de Green será:

$$G(x, x') = \frac{1}{\omega_0\ \text{sen}[\omega_0(b-a)]}\begin{cases} \text{sen}[\omega_0(x'-b)]\ \text{sen}[\omega_0(x-a)] & a \le x < x' \\ \\ \text{sen}[\omega_0(x'-a)]\ \text{sen}[\omega_0(x-b)] & x' < x \le b \end{cases}$$

9. Expansión de la Función de Green en Autofunciones del Operador de Sturm-Liouville

Como se ha visto, las autofunciones del operador de Sturm-Liouville

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

definido en el intervalo $[a, b]$, forman una base ortogonal para el espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables en $[a, b]$,

Entonces, dada una función $\phi(x)$ cuadrado integrable en dicho intervalo tendremos

$$\phi(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\langle\phi|\psi_\ell\rangle}{\|\psi_\ell\|^2}\,\psi_\ell(x)$$

donde

$$\langle\phi|\psi_\ell\rangle = \int_a^b \phi(x')\,\psi_\ell(x')\,dx'$$

Reemplazando en la expresión, tendremos

$$\phi(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_\ell\|^2}\,\left\{\int_a^b \phi(x')\,\psi_\ell(x')\,dx'\right\}\psi_\ell(x)$$

Dada la convergencia uniforme de la serie, podemos reagrupar

$$\phi(x) = \int_a^b \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\psi_\ell(x')\,\psi_\ell(x)}{\|\psi_\ell\|^2} \right\} \phi(x')\,dx'$$

Entonces, por identificación, tendremos que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\psi_\ell(x')\,\psi_\ell(x)}{\|\psi_\ell\|^2} = \delta(x'-x)$$

Con este resultado, escribamos la función de Green desarrollada en autofunciones

$$G(x,x') = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x')\,\psi_\ell(x)$$

Si aplicamos a ambos miembros el operador de Sturm-liouville, tenemos

$$L_x[G(x,x')] = L_x\left[\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x')\,\psi_\ell(x)\right]$$

Como L opera en la variable x, y aplicando la definición de función de Green, resulta:

$$\delta(x'-x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x')\,L[\psi_\ell(x)]$$

Además, tenemos que las $\psi_\ell(x)$ son autofunciones y lo obtenido para la $\delta(x'-x)$:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\psi_\ell(x')\,\psi_\ell(x)}{\|\psi_\ell\|^2} = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x')\,\lambda_\ell\,\psi_\ell(x)$$

Entonces, obtenemos para las funciones $a_\ell(x')$

$$a_\ell(x') = \frac{\psi_\ell(x')}{\lambda_\ell\,\|\psi_\ell\|^2}$$

Con lo cual, la expresión de la Función de Green en autofunciones del operador será:

$$G(x,x') = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\psi_\ell(x')\,\psi_\ell(x)}{\lambda_\ell\,\|\psi_\ell\|^2}$$

Ejemplo. Hallar la función de Green para el operador

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \omega_0^2$$

con las condiciones

$$y(-\pi) = y(\pi) = 0$$

mediante la expansión en autofunciones.

Las autofunciones serán solución del problema de autovalores

$$\frac{d^2\psi_\lambda}{dx^2} + (\lambda - \omega_0^2)\psi_\lambda = 0$$

Para que satisfaga las condiciones de contorno, tendremos que

$$\psi_\lambda(x) = \text{sen}\left[\sqrt{\lambda - \omega_0^2}\, x\right]$$

Para que en $x = -\pi$ y $x = \pi$ se anule, tendremos la condición

$$\sqrt{\lambda - \omega_0^2}\,\pi = n\,\pi$$

Entonces,

$$\lambda - \omega_0^2 = n^2 \qquad \to \qquad \lambda_n = n^2 + \omega_0^2$$

Con estos autovalores, las autofunciones serán:

$$\psi_\ell(x) = \text{sen}(\ell\, x)$$

y la expresión de la función de Green en autofunciones será

$$G(x, x') = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\ell\, x')\,\text{sen}(\ell\, x)}{(\ell^2 + \omega_0^2)\pi}$$

10. Bibliografía Recomendada

- Boyce, William E., Diprima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Ed. Limusa 3ra Edición (1991)
- Bravo Yuste, Santos, *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*. Ed. Universidad de Extremadura (2006)
- Ince, Edward L. *Ordinary differential equations*, Ed. Dover (1956)
- Kreider, D.; Kuller, R.; Ostberg, D.; Perkins, F. *Introducción al análisis lineal*, Tomos I y II, Fondo Educativo Interamericano (1971)
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014)
- Sotomayor, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Ed. IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil (1942)