Polinomios de Legendre

y

Aplicaciones

1. Introducción. Motivación

En un conjunto muy amplio de problemas de la Física Matemática, nos encontramos con el problema de resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que involucran al Laplaciano de una determinada función

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Además, dependiendo de cuál es la simetría del problema a analizar -esto es, donde se fijan las condiciones de contorno, por ejemplo- la elección de un sistema de coordenadas adecuado se vuelve fundamental. Si las condiciones de borde se dan sobre un cubo, las coordenadas cartesianas son las adecuadas. Si las condiciones son impuestas sobre la superficie de una esfera, serán las coordenadas esféricas las que mejor (y más simple) describan el problema. Y así, según las condiciones y simetrías del problema habrá coordenadas preferenciales.

1.1. El Laplaciano en Coordenadas Generales

Al efectuar un cambio de coordenadadas de la forma (en $\mathbb{R}^3$)

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x, y, z) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Vamos a expresar el Laplaciano de una función ϕ ahora en estas nuevas variables. Un aspecto a resaltar es que sólo en coordenadas cartesianas es la suma de las derivadas segundas, y esto se debe a que además de considerar coordenadas cartesianas, adoptamos el producto interno canónico (producto escalar) para la determinación de distancias (la deficinión de la distancia es fundamental para la descripción de un espacio).

Si por ejemplo elegimos las coordenadas cilíndricas, el cambio será

$$\begin{aligned} \rho &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \arctan\left[\frac{y}{x}\right] \\ z &= z \end{aligned}$$

Si hubiéramos elegido coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= r\,\cos(\theta) \end{aligned}$$

ϕ es el ángulo azimutal, es decir, en el plano xy (y su variación es de 0 a 2π) y θ es el ángulo polar, el que varía desde 0 a π.
en este caso, dimos el cambio de manera inversa, es decir, las coordenadas originales, respecto de las nuevas.

La pregunta es ¿Cómo queda la expresión del Laplaciano al efectuar el cambio de coordenadas?

Obviamente, haciendo el cambio de coordenadas y aplicando la regla de la cadena, el Laplaciano deberá poder obtenerse, no sin esfuerzo y como ocurre en operaciones tan extensas, con alta probabilidad de error.

1.2. El elemento de arco. El Tensor Métrico

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ el elemento de arco se define inicialmente a partir de un sistema de coordenadas cartesianas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Realizado el cambio de coordenadas y calculando el ds^2 se obtiene, en las nuevas coordenadas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} g_{\mu\nu} dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx'^{\mu}\, dx'^{\nu}$$

donde las cantidades $g_{\mu\nu}$ son las coordenadas del *tensor métrico* en este sistema de coordenadas

Coordenadas Polares. En coordenadas polares,

$$x = \rho\, \cos(\theta), \quad y = \rho\, \sin(\theta)$$

entonces,

$$dx = \cos(\theta)\, d\rho - \rho\, \sin(\theta) d\theta, \quad dy = \sin(\theta)\, d\rho + \rho\, \cos(\theta) d\theta$$

Calculando el elemento de arco,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2$$

Con lo que las coordenadas del tensor métrico serán

$$g_{\rho\rho} = 1, \;\; g_{\rho\theta} = g_{\theta\rho} = 0, \;\; g_{\theta\theta} = \rho^2$$

$$[\mathbf{g}]_{polares} = \begin{bmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\theta} \\ g_{\theta\rho} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Cilíndricas. En coordenadas cilíndricas,

$$x = \rho\, \cos(\theta), \quad y = \rho\, \sin(\theta) \quad z = z$$

entonces,

$$dx = \cos(\theta)\, d\rho - \rho\, \sin(\theta) d\theta, \quad dy = \sin(\theta)\, d\rho + \rho\, \cos(\theta) d\theta, \quad dz = dz$$

Calculando el elemento de arco,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + dz^2$$

$$[\mathbf{g}]_{cilindricas} = \begin{bmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\theta} & g_{\rho z} \\ g_{\theta\rho} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{z\rho} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Esféricas. En coordenadas esféricas, el cambio de coordenadas es,

$$x = r\, \cos(\varphi) \sin(\theta), \quad y = r\, \sin(\varphi) \sin(\theta) \quad z = r \cos(\theta)$$

entonces,

$$\begin{aligned} dx &= \cos(\varphi)\sin(\theta)dr - r\,\sin(\varphi)\sin(\theta)d\varphi + r\,\cos(\varphi)\cos(\theta)d\theta \\ dy &= \sin(\varphi)\sin(\theta)dr + r\,\cos(\varphi)\sin(\theta)d\varphi + r\,\sin(\varphi)\cos(\theta)d\theta \\ dz &= \cos(\theta)dr - r\,\sin(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Reemplazando en el elemento de arco, obtenemos,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

$$[\mathbf{g}]_{esfericas} = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{r\theta} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

1.3. Cálculo Invariante del Laplaciano

El Laplaciano en coordenadas esféricas y cilíndricas es intrincado para obtenerlo a partir de la simple sustitución de coordenadas y cálculo de derivadas segundas. Sin embargo, mediante técnicas del análisis tensorial, la expresión es mucho más sencilla.

La técnica es la siguiente:

- Dado el cambio de coordenadas, obtenemos la expresión del elemento de arco ds^2
- Obtenemos las coordenadas del tensor métrico, $g_{\mu\nu}$
- Obtenemos, de manera matricial, el inverso, que llamamos $g^{\alpha\beta}$
- Llamemos g al determinante de $g_{\mu\nu}$

Con estas definiciones, calculamos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\sqrt{g} g^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right]$$

Coordenadas polares. En coordenadas polares, $g = \rho^2$, el

$$\left[\mathbf{g}^{-1}\right]_{polares} = \begin{bmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\theta} \\ g^{\theta\rho} & g^{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\sqrt{\rho^2} g^{\rho\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sqrt{\rho^2} g^{\theta\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

Coordenadas cilíndricas. En coordenadas cilíndricas, $g = \rho^2$, el

$$[\mathbf{g}^{-1}]_{cilindricas} = \begin{bmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\theta} & g^{\rho z} \\ g^{\theta\rho} & g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{z\rho} & g^{z\theta} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\rho\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\theta\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\sqrt{\rho^2} g^{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas. En coordenadas esféricas, $g = r^4 \sin^2(\theta)$, el inverso resulta

$$[\mathbf{g}^{-1}]_{esfricas} = \begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\varphi} & g^{r\theta} \\ g^{\varphi r} & g^{\varphi\varphi} & g^{\varphi\theta} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\varphi} & g^{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} g^{rr} \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)} g^{\theta\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

2. Solución para la Esfera mediante Separación de Variables

Si la función $\Phi(r, \theta, \varphi)$ es separable en la forma

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = R(r)\, Y(\varphi, \theta)$$

El Laplaciano toma la forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= Y(\varphi, \theta) \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \\ &+ R(r) \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial Y(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y(\varphi, \theta)}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{R(r)Y(\varphi,\theta)}\nabla^2\Phi &= \frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\\ + &\quad \frac{1}{Y(\varphi,\theta)}\left\{\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial Y(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right\}\end{aligned}$$

Considerando que las variables son separables en el sentido presentado, tenemos que la ecuación de Laplace en esféricas la podemos escribir

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial Y(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

o bien

$$\underbrace{-\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]}_{\text{sólo depende de } r}=\underbrace{\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]}_{\text{sólo depende de } \theta \text{ y } \varphi}$$

Para que esto ocurra, se debe cumplir

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] &= -C\\ \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] &= \quad C\end{aligned}$$

2.1. La Ecuación Radial

La parte radial de la ecuación es

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+C\,R=0$$

Es decir, la *Ecuación de Euler* que ya hemos analizado.

Proponiento una serie de potencias de $R=\sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell r^\ell$ llegamos a

$$\sum a_\ell\left[\ell(\ell-1)+2\ell+C\right]r^{\ell-2}=0$$

Entonces, C es

$$C=-\ell\,(\ell+1)$$

Entonces, la solución general será

$$\phi=A\,\frac{1}{r^{\ell+1}}Y+B\,r^\ell\,Y$$

Con este valor de C vamos a la ecuación para $Y(\theta,\varphi)$

2.2. La ecuación en θ y φ

Para la función $Y(\theta,\varphi)$ la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\ell(\ell+1)\,Y(\varphi,\theta)=0$$

Si efectuamos el cambio de coordenadas $\xi=\cos(\theta)$ tendremos que las derivadas las podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial\theta} &= -\sin(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} &= -\cos(\theta)\frac{\partial Y}{\partial\xi}+\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 Y}{\partial\xi^2}\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación para los ángulos tenemos

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 Y}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial Y}{\partial\xi}+\ell(\ell+1)\,Y+\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0$$

Si proponemos $Y=Y_1(\xi)\,e^{im\varphi}$ con $m\in\mathcal{Z}$ y reemplazamos en la ecuación, tenemos

$$\left\{(1-\xi^2)\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial Y_1}{\partial\xi}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right]Y_1\right\}e^{im\varphi}=0$$

que es satisfecha por la función solución de

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial Y_1}{\partial\xi}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right]Y_1=0$$

que es la *Ecuación Asociada de Legendre.*

3. Simetría Esférica y Azimutal: La Ecuación de Legendre

Si consideramos que por razones de simetría la función Φ no puede depender del ángulo φ, tenemos que es equivalente a $m=0$ en la ecuación asociada de Legendre. Entonces, bajo esa hipótesis, tendremos

$$(1-\xi^2)\frac{d^2 Y_1}{d\xi^2}-2\xi\frac{dY_1}{d\xi}+\ell(\ell+1)Y_1=0$$

que es la ecuación conocida como *Ecuación de Legendre.*

3.1. Solución por series de la Ecuación de Legendre

Consideremos la ecuación de Legendre, en la variable x.

$$(1-x^2)\,y''(x)-2x\,y'(x)+\ell(\ell+1)\,y(x)=0$$

Dado que $x=0$ es un punto ordinario, podemos proponer la solución en serie alrededor de $x=0$,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^k$$

Entonces,

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k\, k\,(k-1)\, x^{k-2}$$

reemplazando en la ecuación diferencial, tenemos

$$(1-x^2)\left[\sum_{k=2}^{\infty} c_k\, k\,(k-1)\, x^{k-2}\right] - 2x\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1}\right] + \ell(\ell+1)\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k}\right] = 0$$

como ya se ha visto en el método de Frobenius, la búsqueda de los coeficientes c_k se hará analizando los órdenes en la variable x. Si realizamos la distributiva en el primer término y agrupamos todo lo que tiene mismo orden en x, tenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k\, k\,(k-1)\, x^{k-2} - \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, k\,(k-1)\, x^{k}\right] - 2\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, k\, x^{k}\right] + \ell(\ell+1)\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{k}\right] = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k\, k\,(k-1)\, x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\ell(\ell+1) - k(k+1)\right] c_k\, x^{k} = 0$$

en la primera sumatoria, si cambiamos $k' = k-2$, tendremos

$$\sum_{k'=0}^{\infty} c_{k'+2}\,(k'+2)\,(k'+1)\, x^{k'} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\ell(\ell+1) - k(k+1)\right] c_k\, x^{k} = 0$$

o, ya que se suma en todo k', podemos usar k en vez de k', resultando:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{c_{k+2}\,(k+2)\,(k+1) + \left[\ell(\ell+1) - k(k+1)\right] c_k\right\} x^{k} = 0$$

que resulta en la relación de recurrencia

$$c_{k+2} = -\left[\frac{\ell(\ell+1) - k(k+1)}{(k+2)\,(k+1)}\right] c_k$$

de esta recurrencia se puede observar que

- c_0 define la familia de coeficientes de índice par
- c_1 define la familia de coeficientes de índice impar

Esto es consistente con el hecho de que hay dos soluciones linealmente independientes.

$$y(x) = c_0 \sum_{par} b_{2k}\, x^{2k} + c_1 \sum_{impar} b_{2k+1}\, x^{2k+1}$$

Otro resultado que se desprende de la relación de recurrencia de coeficientes es lo siguiente:

Si ℓ es un número natural, una de las soluciones será polinómica, de grado ℓ.

4. Polinomios de Legendre

Dada la ecuación de Legendre, con $\ell \in \mathbb{N}$,

$$(1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + \ell(\ell+1)\,y(x) = 0$$

La solución polínómica de grado ℓ que además en $x = 1$ valga 1 es el denominado *polinomio de Legendre de grado ℓ.*

En otras palabras, los polinomios de Legendre son la solución polinómica de la ecuación de Legendre, que satisfacen $P_\ell(1) = 1$

$$(1-x^2)\,P_\ell''(x) - 2x\,P_\ell'(x) + \ell(\ell+1)\,P_\ell(x) = 0, \qquad P_\ell(1) = 1$$

Los primeros polinomios de Legendre son,

ℓ	$P_\ell(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x)$

La otra solución de la ecuación de Legendre es la serie infinita.

4.1. Propiedades

Las propiedades más relevantes de los polinomios de Legendre son, a saber

I. **Fórmula de Rodrigues.**

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right]$$

II. **Relación de Recurrencia.**

$$(\ell+1)\,P_{\ell+1}(x) = (2\ell+1)\,x\,P_\ell(x) - \ell\,P_{\ell-1}(x)$$

III. **Ortogonalidad.**

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\,P_{\ell'}(x)\,dx = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell\ell'}$$

IV. **Función Generatriz.**

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\,t^\ell$$

V. **Paridad.**

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$$

Vamos a demostrar algunas de las propiedades

Ortogonalidad.

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell\ell'}$$

Consideremos dos polinomios de Legendre de grados ℓ y ℓ'. Ambos satisfacen sus respectivas ecuaciones de Legendre

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[P_\ell\right] - 2x\frac{d}{dx}\left[P_\ell\right] + \ell\,(\ell+1)\,P_\ell &= 0 \\
(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[P_{\ell'}\right] - 2x\frac{d}{dx}\left[P_{\ell'}\right] + \ell'\,(\ell'+1)\,P_{\ell'} &= 0
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right] + \ell\,(\ell+1)\,P_\ell &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\right] + \ell'\,(\ell'+1)\,P_{\ell'} &= 0
\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $P_{\ell'}$ y la segunda por P_ℓ, y restando, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right]P_{\ell'} - \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\right]P_\ell = \left[\ell'\,(\ell'+1) - \ell\,(\ell+1)\right]P_\ell P_{\ell'}$$

Integremos entre -1 y 1 el miembro de la izquierda:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right]P_{\ell'}dx - \int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\right]P_\ell dx = \\
&\left\{(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}P_{\ell'}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\frac{dP_{\ell'}}{dx}dx\right\} - \\
&\left\{(1-x^2)\frac{dP_{\ell'}}{dx}P_\ell\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dP_{\ell'}}{dx}\frac{dP_\ell}{dx}dx\right\} = 0
\end{aligned}$$

Entonces, si $\ell \neq \ell'$ tenemos

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x) dx = 0$$

El cálculo de

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^2(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}$$

Lo dejaremos para después que demostremos otra propiedad.

Fórmula de Rodrigues. La fórmula de Rodrigues (Olinde Rodrigues, 1795 - 1851) es útil para la obtención de los polinomios de Legendre. Este resultado se generalizó y varias funciones denominadas especiales pueden obtenerse a partir de una fórmula de Rodrigues.

Para llegar a la fórmula de Rodrigues, utilicemos la recurrencia de los coeficientes,

$$c_{k+2} = -\left[\frac{\ell(\ell+1)-k(k+1)}{(k+2)\,(k+1)}\right] c_k$$

En particular, si vamos de manera descendente, podemos obtener

$$c_{\ell-2} = -\frac{\ell(\ell-1)}{2\ell-1}\,c_\ell, \qquad c_{\ell-4} = -\frac{(\ell-2)(\ell-3)}{2(2\ell-3)}\,c_\ell = \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3}{2^2(2\ell-1)(2\ell-3)}\,c_\ell \qquad \ldots$$

Entonces, podemos escribir:

$$\begin{aligned} P_\ell(x) &= c_\ell\left[x^\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2(2\ell-1)}x^{\ell-2} + \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)}{2^2(2\ell-1)(2\ell-3)}x^{\ell-4}\right. \\ &- \left.\frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)(\ell-4)(\ell-5)}{2^3(2\ell-1)(2\ell-3)(2\ell-5)}x^{\ell-6} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Evaluando en $x=1$ se debe cumplir $P_\ell(1)=1$, entonces,

$$1 = c_\ell\left[1 - \frac{\ell(\ell-1)}{2(2\ell-1)} + \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)}{2^2(2\ell-1)(2\ell-3)} - \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)(\ell-4)(\ell-5)}{2^3(2\ell-1)(2\ell-3)(2\ell-5)} + \cdots\right]$$

podemos notar que si fijamos

$$c_\ell = \frac{(2\ell-1)!!}{\ell!}$$

con $(2\ell-1)!! = (2\ell-1)(2\ell-3)(2\ell-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$, se cumple la condición $P_\ell(1)=1$.

El polinomio de Legendre de grado ℓ se puede escribir, entonces,

$$\begin{aligned} P_\ell(x) &= \frac{(2\ell-1)!!}{\ell!}\left[x^\ell - \frac{\ell(\ell-1)}{2(2\ell-1)}x^{\ell-2} + \frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)}{2^2(2\ell-1)(2\ell-3)}x^{\ell-4}\right. \\ &- \left.\frac{\ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)(\ell-4)(\ell-5)}{2^3(2\ell-1)(2\ell-3)(2\ell-5)}x^{\ell-6} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Si integramos $\ell-$veces esta expresión, tenemos:

$$\frac{(2\ell-1)!!}{(2\ell)!}\left[x^{2\ell} - \ell\,x^{2\ell-2} + \frac{\ell(\ell-1)}{2!}x^{2\ell-4} - \cdots\right]$$

En el corchete está la expresión del binomio de Newton $(x^2-1)^\ell$. Entonces,

$$\frac{(2\ell-1)!!}{(2\ell)!}(x^2-1)^\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!}(x^2-1)^\ell$$

Como esta expresión es la integral $n-$ésima, tendremos

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[(x^2-1)^\ell \right]$$

que es la Fórmula de Rodrigues.

La función generatriz. A partir de lo obtenido para la resolución de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

en coordenadas esféricas y con simetría azimutal, habíamos llegado a

$$u = \left[A \, \frac{1}{r^\ell} + B \, r^\ell \right] Y_1(\theta) = \left[A \, \frac{1}{r^\ell} + B \, r^\ell \right] P_\ell(\cos(\theta))$$

Por es denominado *pricipio de superposición* y por la linealidad de la ecuación diferencial, tendremos:

$$u = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[A_\ell \, \frac{1}{r^\ell} + B_\ell \, r^\ell \right] P_\ell(\cos(\theta))$$

Si además, imponemos que nuestra solución de cuenta del problema interior a la esfera unidad, esto es, que en r_0 no diverja, entonces, $A_\ell = 0$. Luego,

$$u = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \, r^\ell \, P_\ell(\cos(\theta))$$

Finalmente, si $\theta = 0$, esto es, calculamos el potencial generado por una partícula en un punto del eje z, con lo cual, será $u = \frac{1}{1-r}$ entonces,

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \, r^\ell \, P_\ell(\cos(0)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \, r^\ell \, P_\ell(1) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \, r^\ell$$

Por identificación con la suma geométrica, no queda otra posibilidad que $B_\ell = 1$ para todo ℓ.

Entonces,

$$u = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell \, P_\ell(\cos(\theta))$$

Esta es la función que es la inversa entre la distancia entre un punto de la esfera de radio unidad y un punto del interior de la misma.

El cálculo de la misma, es sencillo, ya que es

$$u = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + r^2 - 2\, r \, \cos(\theta)}}$$

Entonces, igualando,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2\, r \, \cos(\theta)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell \, P_\ell(\cos(\theta))$$

Si usamos t en vez de r y $x = \cos(\theta)$ queda la propiedad demostrada.

Norma de $P_\ell(x)$. Consideremos la funció generatriz y su desarrollo en polinomios de Legendre,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2\,t\,x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\,t^\ell$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, podemos escribir:

$$\frac{1}{1+t^2-2\,t\,x} = \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\,t^\ell\right]\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\,t^\ell\right]$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{1+t^2-2\,t\,x} = \sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\,P_{\ell'}(x)\,t^{\ell+\ell'}$$

Integrando a ambos miembros respecto de x entre -1 y 1, obtenemos

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2-2\,t\,x}\,dx = \int_{-1}^{1}\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\,P_{\ell'}(x)\,t^{\ell+\ell'}\,dx$$

La integral de la izquierda es directa, resultando

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2-2\,t\,x}\,dx = \frac{(-1)}{2t}\log(1+t^2-2t\,x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{t}\left[\log(1+t)-\log(1-t)\right]$$

Ahora, los desarrollos de Taylor de los logaritmos involucrados son

$$\begin{aligned}\log(1+t) &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell}\,t^\ell\\ -\log(1-t) &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2\ell}}{\ell}\,t^\ell\end{aligned}$$

Sumando,

$$\log(1+t)+(-1)\log(1-t) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{((-1)^{\ell+1}-1)}{\ell}x^\ell$$

Además,

$$((-1)^{\ell+1}-1) = \begin{cases} 2 & \ell \text{ impar}\\ 0 & \ell \text{ par}\end{cases}$$

Entonces, como del lado derecho podemos aplicar la ortogonalidad ya demostrada, tendremos:

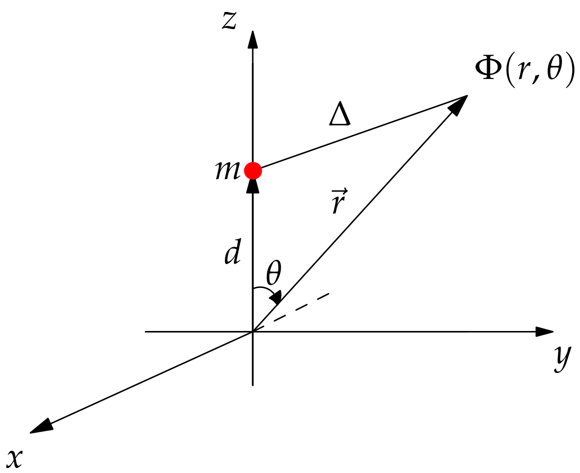
$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2}{2\ell+1}\,t^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1} P_\ell^2(x)\,dx\right]t^{2\ell}$$

Entonces,

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^2(x)\,dx = ||P_\ell(x)||^2 = \frac{2}{2\ell+1}$$

5. Aplicaciones I: Cálculo del Potencial

Calculemos el potencial gravitatorio (o electrostático) generado por una partícula (o carga) ubicada en un determinado punto del espacio. En particular y sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la partícula yace sobre el eje z, como indica la figura.



Notemos que el potencial no depende del ángulo azimutal, ya que el valor del potencial es el mismo a $z = cte$

El potencial en el punto será:

$$\Phi(r,\theta) = -G\,m\,\frac{1}{\Delta}$$

Por el Teorema del coseno, podemos calcular Δ

$$\Delta^2 = d^2 + r^2 - 2\,d\,r\,\cos(\theta)$$

Entonces,

$$\Phi(r,\theta) = -G\,m\,\frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2\,d\,r\,\cos(\theta)}}$$

Si consideramos $r \gg d$ podemos extraer factor común dentro de la raíz

$$\Phi(r,\theta) = -\frac{G\,m}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{r^2} - 2\,\frac{d}{r}\cos(\theta)}}$$

Si llamamos $\alpha = \frac{d}{r}$ podemos escribir

$$\Phi(r,\theta) = -\frac{G\,m}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\,\alpha\cos(\theta)}}$$

Podemos notar que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\,\alpha\cos(\theta)}}$$

es la función generatriz de los polinomios de Legendre, pero en vez de x, en $\cos(\theta)$ y en vez de t, α

Entonces, la expresión del potencial gravitatorio será

$$\Phi(r,\theta) = -\frac{G\,m}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos(\theta)\,\alpha^\ell, \qquad\qquad \left(\alpha = \frac{d}{r}\right)$$

Ya que conocemos los primeros términos, veamos la expresión del potencial, bien lejos de la partícula.

Los primeros términos del potencial serán

$$\Phi(r,\theta) = -G\,m\left\{\frac{P_0(\cos(\theta))\alpha^0}{r} + \frac{P_1(\cos(\theta))\alpha^1}{r} + \frac{P_2(\cos(\theta))\alpha^2}{r} + \dots\right\}$$

Reemplazando los polinomios de Legendre

$$\Phi(r,\theta) = -G\,m\left\{\frac{1}{r} + \frac{\cos(\theta)\,d}{r^2} + \frac{(3\cos^2(\theta)-1)d^2}{2r^3} + \dots\right\}$$

El primer término es el potencial generado por la masa m como si ésta estuviera en el origen del sistema de coordenadas.

Si el potencial hubiera sido el electrostático, tendríamos

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} + \frac{\cos(\theta)\,d\,q}{r^2} + \frac{(3\cos^2(\theta)-1)q\,d^2}{2r^3} + \dots\right\}$$

El primer término se lo conoce como *término de monopolo.*

El segundo término recibe el nombre *término de dipolo.*

El tercer término recibe el nombre de *término de cuadrupolo.*

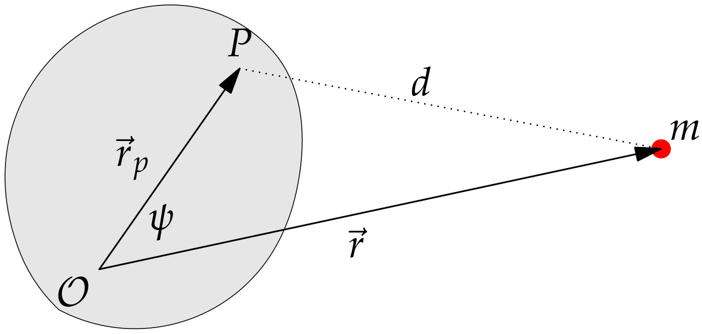
6. Aplicaciones II: Potencial de Mareas

Otra aplicación de los Polinomios de Legendre es el cálculo y análisis del fenómeno de *mareas.*

6.1. Definiciones

- **Masas.** Vamos a condiderar un sistema definidio por una partícula puntual (satélite) de masa m y una distribución continua de materia (planeta), cuya masa total será M .
    - Masa del Planeta: M
    - Masa del Satélite: m
- **Origen y orientación de ejes.** Vamos a considerar un origen dentro del planeta, cuyo eje x estará en la dirección de la ubicación instantánea del satélite.
- **Indicación del Sistema de Referencia.** Vamos a adoptar un subíndice p para indicar que las coordenadas son referidas al sistema de referencia con centro dentro del planeta. Esto es $\vec{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ es la posición de un punto P en el sistema de referencia con origen en el planeta.

Gráficamente, la situación planteada será



El potencial en el punto P será

$$U(\vec{r}_p) = -\frac{G\,m}{d} = -\frac{G\,m}{\sqrt{r^2 + r_p^2 - 2r\,r_p\,\cos(\psi)}}$$

donde $r_p = ||\vec{r}_p||$ y lo propio para r.

Asumiendo $r > r_p$ y desarrollando en polinomios de Legendre, tenemos

$$U(\vec{r}_p) = -\frac{G\,m}{d} = -G\,m\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_p^\ell}{r^{\ell+1}}P_\ell(\cos(\psi))$$

Entonces,

$$U(\vec{r}_p) = -G\,m\left\{\frac{1}{r} + \frac{r_p\,\cos(\psi)}{r^2} + \frac{(3\cos^2(\psi)-1)r_p^2}{2\,r^3} + \cdots\right\} = U_0(\vec{r}_p) + U_1(\vec{r}_p) + U_2(\vec{r}_p) + \cdots$$

Analicemos cada término:

- U_0:
$$U_0(\vec{r}_p) = -\frac{G\,m}{r}$$
Este término no depende de $\vec{r}_p$ por lo que lo podemos considerar constante. No aporta a ninguna fuerza.

- U_1:
$$U_1(\vec{r}_p) = -\frac{G\,m}{r^2}r_p\,\cos(\psi) = -\frac{Gm}{r^3}\,\vec{r}\cdot\vec{r}_p$$
Este término produce una fuerza constante (que no depende de $\vec{r}_p$) ya que
$$\nabla[U_1] = -\frac{Gm}{r^3}\,\vec{r}$$

Los demás términos dependen de $\vec{r}_p$ tanto en el potencial como en la fuerza.

6.2. El potencial de marea

Teniendo en cuenta el análisis precedente, vamos a considerar *potencial de marea* a la parte del potencial que produce fuerza no constante, esto es,

$$U_{marea}(\vec{r}_p) = U(\vec{r}_p) + \frac{G\,m}{r} + \frac{G\,m}{r^3}\,\vec{r}\cdot\vec{r}_p$$

entonces,

$$U_{marea}(\vec{r}_p) = -\frac{G\,m}{r}\left\{\left[\frac{r_p}{r}\right]^2\,P_2(\cos(\psi)) + \left[\frac{r_p}{r}\right]^3\,P_3(\cos(\psi)) + \cdots\right\}$$

Si consideramos el caso en que $r \gg r_p$ podemos aproximar el potencial de marea con el primer término, esto es,

$$U_{marea}(\vec{r}_p) \approx -\frac{G\,m}{r}\,\left[\frac{r_p}{r}\right]^2\,P_2(\cos(\psi))$$

Si consideramos, además, que el planeta es esférico, de masa M y radio R y evaluamos el potencial de marea sobre la superficie del planeta, tendremos

$$U_{marea}(R) = -\frac{G\,m}{2r^3}R^2(3\cos^2(\psi) - 1)$$

Si queremos expresar este potencial en función de la gravedad superficial,

$$g = \frac{G\,M}{R^2}$$

$$U_{marea}(R) = -g\,\left[\frac{m}{M}\right]\,\left[\frac{R}{r}\right]^3\,R\,\left[\frac{3\cos^2(\psi)-1}{2}\right]$$

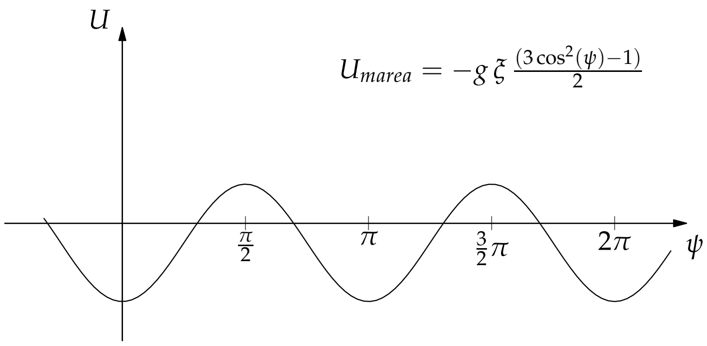
Amplitud de Marea. Llamando *amplitud de marea*, ξ a la expresión (Murray & Dermott)

$$\xi = \left[\frac{m}{M}\right]\,\left[\frac{R}{r}\right]^3\,R$$

Podemos escribir

$$U_{marea}(R) = -g\,\xi\,\left[\frac{3\cos^2(\psi)-1}{2}\right]$$

Gráficamente,



Los máximos y mínimos se alternan por intervalos de $\pi/2$, es decir, cada 6 horas. Esto es, cada 12 horas hay *pleamar* y cada 12 horas *bajamar*.

7. Bibliografía Recomendada

- Boyce, William E.; Diprima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Ed. Limusa (1991)
- Kellog, Oliver D. *Foundations of Potential Theory*, Ed. Dover (1953).
- Kreider, D.; Kuller, R.; Ostberg, D.; Perkins, F. *Introducción al Análisis Lineal*, Tomo II, Fondo Educativo Interamericano (1971)
- Murray, Carl D.; Dermott, Stanley F. *Solar System Dynamics*, Ed. Cambridge University Press (1999)
- Simmons, George F. *Differential equations with applications and historical notes*, Ed. Mc Graw Hill (1972)