F. Sturm–Liouville y EDPs: Práctica 6

F.1 Problemas con condiciones de borde

Los problemas que involucran EDPs resultan ser, en general, bastante complejos. Aprovecharemos esta complejidad inherente para aprender varios conceptos y metodologías fundamentales en la resolución de este tipo de ecuaciones. En otras palabras, con la resolución de las EDPs que presentamos en esta práctica no sólo abarcaremos el problema de Sturm–Liouville para calibrar la solución de acuerdo a las condiciones de borde (que serán del tipo **Dirichlet, Newmann y mixtas**), sino que además haremos uso de las series de Fourier para ajustar los coeficientes libres de la función incógnita a partir de las condiciones iniciales.

F.1.1 Sturm–Liouville

Comenzaremos con una breve ejercitación de Sturm–Liouville, sólo para ir observando lo que un problema de valores de borde puede significar.

Problema F.1 — Calentando motores. Identifique la siguiente EDO y reescríbala en la forma canónica de Sturm–Liouville. Luego resuelva el problema de valores de borde:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\lambda u=0, \text{ con } u(1)=u(2)=0; 1<x<2.$$

Una vez que encuentre las autofunciones del problema, expanda en dicha base una función arbitraria $f(x)$, i.e. encuentre los coeficientes asociados a su desarrollo en serie.

F.1.2 EDPs

Problema F.2 — Todo tiene un final todo termina: penúltimo presente. Veremos tres ecuaciones fundamentales en Física.

> **Ejercicio F.1 — La ecuación del calor.** Resuelva e interprete físicamente:
>
> $$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $u(x,0) = f(x)$ la condición inicial, para los siguientes problemas:

1. $u(-L,t) = u(L,t)$ y $u_x(-L,t) = u_x(L,t)$, i.e. mixto[a] con condiciones de borde periódicas;

2. $u(-L,t) = T_1$ y $u(L,t) = T_2$ con $T_1, T_2 \neq 0$[b], i.e. del tipo Dirichlet con condiciones de borde inhomogéneas.

En ambos casos, encuentre la distribución de temperatura en el equilibrio ($u_e(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$), de esta manera podrá observar la evolución temporal completa de la solución, i.e. $u(x,0) = f(x)$, $u(x,t)$ y $u_e(x)$. ■

[a] Tenga en cuenta que las condiciones de borde de Dirichlet dan valores a la distribución de temperatura, cuando las de Newmann dan valores al flujo (en el marco de la ecuación del calor).

[b] Ayuda: el método de separación de variables es válido cuando tanto la EDP como las condiciones de borde son homogéneas y lineales, que no es el caso, luego, para resolver la ecuación diferencial fabrique la función $v(x,t) = u(x,t) - u_e(x)$ donde $u_e(x)$ es la temperatura de equilibrio, i.e. $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_e(x)$.

Ejercicio F.2 — Agregamos una fuente. Resuelva e interprete físicamente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x,$$

con $u(x,0) = g(x)$ la condición inicial y $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = B$, las condiciones de borde inhomogéneas (Dirichlet, ver Fig. F.1). ■

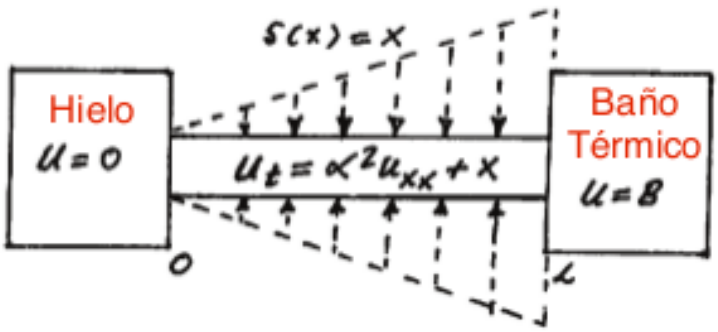

Figura F.1: Esquema para el Ejercicio F.2.

Ejercicio F.3 — La ecuación de la onda. Resuelva e interprete físicamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$ las condiciones iniciales y $u(0,t) = u(L,t) = 0$ las condiciones de borde (Dirichlet). Grafique los 4 primeros modos de vibración. ■

Ahora ejercitaremos sobre la ecuación de Laplace, de las más importantes en Física. Note que la misma modela **soluciones en equilibrio**, e.g. si en la ecuación del calor o de la onda antes vistas no tuviéramos evolución temporal (i.e. la derivada con respecto al tiempo es nula), lo que restaría por resolver sería el laplaciano igual al valor nulo.

Ejercicio F.4 — La ecuación de Laplace. Resuelva:

1. la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

para los siguientes problemas:

a) de Dirichlet: $u(x,0)=f_1(x)$, $u(x,b)=f_2(x)$, $u(0,y)=g_1(y)$ y $u(a,y)=g_2(y)$ (ver Fig. F.2, panel izquierdo), con condiciones de borde inhomogéneas.
b) mixto: $u_x(0,y)=u_x(a,y)=u(x,0)=0$, $u(x,b)=f(x)$ (ver Fig. F.2, panel derecho), con condiciones de borde inhomogéneas.

2. la ecuación de Laplace en coordenadas polares para el siguiente problema mixto:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,$$

donde $|u(0,\theta)|<\infty$, $u(a,\theta)=f(\theta)$, $u(-\pi,t)=u(\pi,t)$ y $u_r(-\pi,t)=u_r(\pi,t)$, con condiciones de borde inhomogéneas y periódicas.

Interprete físicamente los anteriores ejercicios, tanto en el contexto de la ecuación del calor, como en el de la ecuación de la onda, i.e. piense a $u(x,y)$ como una distribución superficial de temperatura y como el desplazamiento vertical en una membrana bidimensional. ■

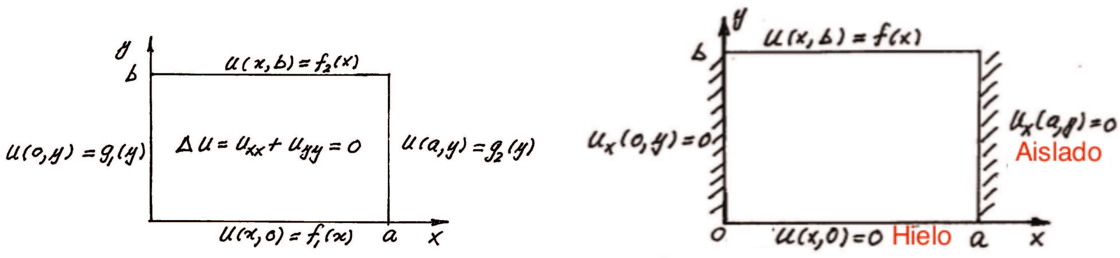

Figura F.2: Esquemas para los Ejercicios F.4 1. a) y b).

F.1.3 Modelo realista

Problema F.3 — Tantarantán Tan tan (fin). Modele y estudie las vibraciones de una membrana circular sujeta a una fuerza restitutiva proporcional a la velocidad, bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{array}{lllll} u(r,\theta,0) & = & f(r,\theta) & = & \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} J_m(j_{m,1} r)\cos(m\theta) & \text{(desplazamiento vertical inicial)}, \\ u_t(t=0) & = & g(r,\theta) & = & 0 & \text{(velocidad inicial, en resposo)}, \end{array}$$

y la siguiente condición de borde: $u(a,\theta,t)=0$ con a el radio de la membrana.

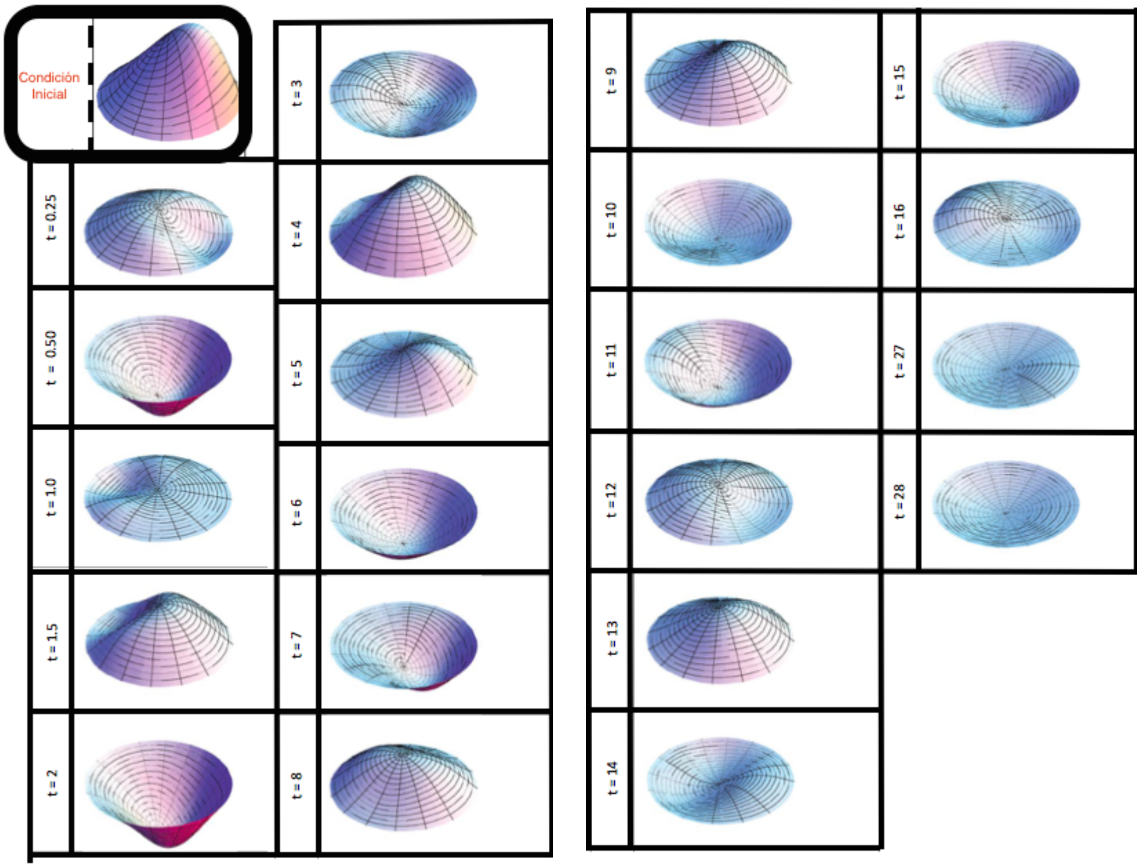

Figura F.3: Evolución temporal de la vibración para: $K = 0{,}3$ (la constante de proporcionalidad), $c^2 = 0{,}3716[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]$ y $a = 30{,}48[\mathrm{cm}]$ (el radio de la membrana circular). Problema F.3.