E. Fourier: Práctica 5

E.1 Señales periódicas

Definición E.1.1 — Series de Fourier. La serie de Fourier en cosenos para una función (extendida periódicamente como par) $f(x)$, en el intervalo $-L \leq x \leq L$ es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con } A_n = \begin{cases} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx & n = 0, \\ \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx & n \neq 0. \end{cases}$$

La serie de Fourier en senos para una función (extendida periódicamente como impar) $g(x)$, en el intervalo $-L \leq x \leq L$ es:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ con } B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \text{ con } n \neq 0.$$

Es claro, entonces, que para una función arbitraria (sin que sea par o impar, extendida periódicamente) la serie de Fourier estará compuesta tanto por senos como por cosenos. La serie de Fourier en complejos para una función (extendida periódicamente) $h(x)$, en el intervalo $-L \leq x \leq L$ es:

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{i\,n\pi x}{L}\right) \text{ con } C_n = \begin{cases} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(x)dx & n = 0, \\ \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(x)\exp\left(-\frac{i\,n\pi x}{L}\right)dx & n = \pm 1, \pm 2\ldots \end{cases}$$

Problema E.1 — Reales y complejas. Trabajaremos con las bases sinusoidales y exponenciales complejas, recalcando su equivalencia.

Ejercicio E.1 — Medio rango y rango completo. Encuentre las series de Fourier de (a) senos, (b) cosenos para las siguientes funciones:

1. $f(x) = L - x$ con $x \in [0, L]$;
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{con } x \in [0, L/2], \\ x - \frac{L}{2} & \text{con } x \in [L/2, L]; \end{cases}$
3. $f(x) = 1 + x^2$ con $x \in [0, L]$.

Explicite si hizo uso de extensiones pares o impares, grafíquelas e indique los dominios extendidos. Para los casos (1) y (3) calcule, además, la serie de senos y cosenos, i.e. utilice la función en rango completo. Compare los resultados de los tres tipos de series en (3): ¿qué puede decir al respecto? Siguiendo con (1), para ver su convergencia, grafique las series de senos y cosenos aumentando secuencialmente la cantidad de términos, señale el *overshooting* debido al fenómeno de Gibbs. ¿A qué valores converge en las discontinuidades? ■

Ejercicio E.2 — Equivalencia, para tener una idea. Encuentre los coeficientes para la serie de Fourier en complejos a partir de los coeficientes para la serie de Fourier en reales. Luego, calcule la serie de Fourier en complejos para la función $f(t)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{con } x \in [0, T], \\ 0 & \text{con } x \in [T, 2\pi]; \end{cases}$$

y compute los coeficientes para el desarrollo en reales. ■

Problema E.2 — Identidades. Haga uso de las series de Fourier para demostrar la siguiente identidad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

a partir del desarrollo de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

E.1.1 Aplicación: la Ecuación del Calor

Problema E.3 — Donde todo comenzó. Ahora vamos a tocar el tema de las aplicaciones. Resuelva la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

con $u(x, 0) = f(x)$, donde:

$$f(x) = \begin{cases} 6\sin(\pi x/L); \\ 12\sin(9\pi x/L) - 7\sin(4\pi x/L); \\ 20; \end{cases}$$

para las condiciones de borde: $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Interprete físicamente.

Ejercicio E.3 Estamos tratando con una EDP, dado que la función u depende de dos variables, una que denota la parte espacial x y otra la parte temporal t de la solución. Entonces, el primer paso es llevar esta ecuación en derivadas parciales al terreno de las EDOs. Para ello aplicamos el método de separación de variables, el cual propone modelar a la solución $u(x, t)$ como el producto de dos funciones de una variable, en este caso: $u = \psi(x)G(t)$.

- Remplace el modelo $u = \psi(x)G(t)$ de solución en la EDP y en las condiciones de borde e inicial, intentando separar el problema en dos, donde cada uno esté compuesto por una EDO. Para ello, haga uso de una constante de separación λ, dejando la constante k de la ecuación del calor, en el problema unidimensional que depende del tiempo. Verifique que la EDO cuya variable es el tiempo tendrá una condición inicial, en cambio el problema que tiene por variable independiente x, tendrá las dos condiciones de borde.

■

Ejercicio E.4 Note que la ecuación para $G(t)$ dependerá de la constante de separación λ, que no conoce, por lo que primero debe resolver la EDO para $\psi(x)$. Esta EDO debería haberle quedado homogénea de 2do orden a coeficientes constantes, donde estos son 1 (acompaña a la derivada segunda) y λ que acompaña a la función ψ.

- Resuelva la EDO de 2do orden para $\psi(x)$ con las condiciones de borde correspondientes, considerando los casos en que (a) $\lambda > 0$, (b) $\lambda = 0$ y (c) $\lambda < 0$. Este se conoce como problema canónico de **Sturm–Liouville**.

■

Ejercicio E.5 Para cada uno de los 3 casos, podrá ver fácilmente si tiene o no solución. En caso de tener solución, serán varias y formarán un conjunto, i.e. encontrará valores discretos del λ: λ_n, llamados **autovalores**, que estarán asociados con las soluciones que llamaremos $\phi_n(x)$, o **autofunciones**.

- Teniendo los valores para λ_n, resuelva la ecuación para $G(t)$ y obtenga el espectro de soluciones $u_n(x,t)$. Debiera llegar a la siguiente expresión:

$$u_n(x,t) = B_n \sin(\sqrt{\lambda}x)\mathrm{e}^{-k\lambda t} \text{ con } n = 1,2,3,\dots \text{ y donde } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

■

Ejercicio E.6 Con esta expresión puede calibrar los valores de los coeficientes a partir de la condición inicial, i.e. a partir de $f(x)$. Ahora es donde le toca a usted sin ayuda.

- Encuentre los valores de los B_n para cada una de las $f(x)$ planteadas.

■

E.2 Señales periódicas y aperiódicas

Ejercicios opcionales para Matemáticas Avanzadas

Definición E.2.1 — Transformada de Fourier. Suponga $f(t)$ y $f'(t)$ funciones continuas a trozos, tal que $f(t)$ es absolutamente convergente[a]. La transformada de Fourier de $f(t)$ estará definida por:

$$\mathbb{F}[f(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} f(t)dt.$$

[a] La función $f(x)$ es absolutamente convergente si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$.

Problema E.4 — El dominio de las frecuencias. Dadas las siguientes señales, obtenga su descripción en el espacio de las frecuencias por medio de la aplicación de la transformada de Fourier.

Ejercicio E.7 — La delta de Dirac. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales periódicas y grafique el resultado en el espacio de las frecuencias:

$f(t) = \cos(\omega_0 t)$;

$f(t) = \sin(\omega_0 t)$;

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{i\,n\pi t}{L}\right)$. ■

Ejercicio E.8 — Pulsos. Grafique las siguientes señales aperiódicas, luego calcule su transformada de Fourier:

1. Pulso rectangular:
$$f_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } -a < t < a, \\ 0 & \text{cuando } |t| > a. \end{cases}$$
2. Pulso exponencial par:
$$f_e^p(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{cuando } t > 0, \\ e^{at} & \text{cuando } t < 0. \end{cases}$$
3. Pulso exponencial impar:
$$f_e^i(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{cuando } t > 0, \\ -e^{at} & \text{cuando } t < 0. \end{cases}$$

■

Ejercicio E.9 — Como Laplace. Sea la siguiente EDO a coeficientes constantes (muy conocida en el ámbito de la mecánica):

$$y'' + 2\kappa y' + \Omega^2 y = f_e^i(t),$$

denominada **ecuación del oscilador armónico forzado y amortiguado**, aplique la transformada de Fourier para encontrar $\mathbb{F}[y(t)](\omega)$ (no antitransforme, ya habrá luchado con la complejidad de antitransformar en los ejercicios de transformada de Laplace). ■