A. Ecuaciones Diferenciales: Práctica 1

A.1 EDOs de Primer Orden

A.1.1 Métodos elementales de resolución

Problema A.1 — Primer orden. Comenzamos la práctica clasificando EDOs y resolviendo sólo aquéllas que sean de primer orden. Entonces, para cada una de las siguientes EDOs, indique:

- Orden,
- linealidad,
- tipo de coeficientes,
- y si tiene término independiente.

Sólo en caso de ser una ecuación de primer orden, indique si es homogénea (y demuestre), luego resuelva, dejando explícito el método de resolución utilizado (*sustitución, homogéneas, exactas, factor integrante, variables separables*[1] o cualquier combinación de estos mecanismos) y los puntos en los cuales encuentra problemas (en caso de tratarse de posibles soluciones, aclare si efectivamente las descarta como tales). Al encontrar la solución, si la deja en su formato implícito, aclárelo. Finalmente, de tratarse de un problema de valores iniciales, indicar tanto la solución general como la particular.

Ejercicio A.1 — Análisis integral. Clasifique como se le ha indicado y, si corresponde, resuelva.

1. $\sin(x)y'' - 4xy' + y = \cos(x^2)$;
2. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$;
3. $r'(\theta) = r$, resuelva en polares y en cartesianas, indique qué diferencias observa;

[1] Los métodos que figuran en *itálica* a lo largo de la práctica son los únicos necesarios para resolverla, por lo tanto busque los mecanismos que representan entre sus apuntes.

4. $y'' + \cos(x+y) = \cos(x)$;

5. $x'' + \omega^2 x = 0$;

6. $y' + \frac{4y}{x} = x^3 y^2$ con $y(2) = -1$, $x > 0$, determinar el intervalo de validez de la solución (note que es una ecuación diferencial de Bernoulli);

7. $e^{2y} - y\cos(xy) = -\left[2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right] y'$;

8. $\left[\frac{1}{1+y^2} + \cos(x) - 2xy\right] y' = y^2 + y\sin(x)$ con $y(0) = 1$;

9. $y' = \frac{y-4x}{x-y}$, hacer uso del cambio de variables $y = xu(x)$;

10. $\frac{1}{2} m x'^2 + U(x) = E_0$;

11. $y' = e^{2x} + y - 1$;

12. $\left(3x + \frac{6}{y}\right) dx = -\left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right) dy$;

13. $(2x - y - 4)\,dy = (2y - x + 5)\,dx$, hacer uso del cambio de variables $x = u - u_0$ y $y = v - v_0$ e interprete geométricamente el cambio.

■

A.1.2 Modelado de problemas

Problema A.2 — Un cachetazo de realidad. Es claro que la naturaleza no nos pone las ecuaciones sobre la mesa. Aunque muchas veces ya el resolverlas puede ser un dolor de cabeza (como quizás ya vieron en el problema anterior), a veces el mayor de los obstáculos es interpretar matemáticamente lo que observamos, i.e. construir la ecuación diferencial que describe determinada situación. En otras palabras, muchas veces el gran obstáculo es la construcción del modelo.
Dados los siguientes problemas, escriba la ecuación diferencial que los describen matemáticamente, y resuelva.

Ejercicio A.2 Suponga un tanque de 1500 litros que inicialmente contiene 600 litros de agua con 5 kg de sal disuelta en ella. El agua entra al tanque a razón de 9 litros por hora, con una concentración de sal dada por $f(x) = \frac{1}{5}(1 + \cos(t))$ kg por litro. La solución, que suponemos homogénea por simplicidad, abandona el tanque a razón de 6 litros por hora. ¿Cuánta sal habrá en el tanque cuando este desborde? ■

Ejercicio A.3 **Opcional para Matemáticas Avanzadas:** Una población de insectos, en una dada región, crece con un ritmo proporcional a ella misma. En ausencia de agentes externos, la población se triplicaría en 2 semanas. Sin embargo, cada día hay una migración neta al área de 15 insectos, pero 16 serán comidos por aves locales cuando otros 7 morirán por causas naturales. Si inicialmente la población es de 100 insectos, ¿acaso la misma sobrevivirá? De no ser el caso, ¿cuándo dejará de haber insectos en la región?[a]

[a]Ayuda: note que necesitará dos ecuaciones diferenciales, una para determinar el factor de proporcionalidad entre la población y su derivada, y la segunda para, a partir de este factor y la inclusión de los agentes externos, determinar la evolución diaria de la población.

Ejercicio A.4 **Opcional para Matemáticas Avanzadas:** Una masa de 50 [kg] se dispara desde un cañón, apuntando hacia arriba, a una velocidad inicial de 10 [m/s] desde un puente situado a 100 [m] por encima del suelo. Si la resistencia del aire está dada por $5 \times v$ con v la velocidad de la masa, determine la velocidad de esta al tocar el suelo (deberá suponer que hay un agujero por el que la masa atraviesa el puente).[a]

[a]Ayuda: escriba la ecuación diferencial para la velocidad y luego integre para encontrar el tiempo al cual la masa tocó el suelo, con este dato evalúe la velocidad a dicho tiempo para responder la pregunta. Considere la aproximación de aceleración constante para la atracción gravitaoria.

Ahora bien, como el modelado en las ciencias astronómicas y de la atmósfera, tanto como en la geofísica, es un problema de interpretación física, y siendo esta, una materia de Matemáticas, nos ocuparemos en lo que sigue de estudiar las herramientas que les permitan obtener información, una vez construidos los modelos (i.e. las ecuaciones diferenciales).

A.2 Método de Picard

Problema A.3 — Pispamos Picard. Si bien el *método de Picard* no es un método adecuado para resolver a mano, es muy útil para programarlo, dada su naturaleza iterativa. No obstante, resolvamos un par de ejemplos para entender cómo opera.

Ejercicio A.5 Primero pruebe las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones, luego resuelva aplicando Picard. Encuentre la expresión a la que convergen las series. Grafique secuencias de aproximaciones para observar la validez de su convergencia a la solución.

1. $y^{(1)} = 2x(1-y)$, con $y(0) = 2$;

2. $y^{(1)} = 2(y+1)$, con $y(0) = 0$.