Matemáticas Especiales II
Clase 9
Transformada de Laplace I

Definiciones y Propiedades

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Transformada de Laplace
Definiciones y Propiedades

- Transformaciones Integrales
- Definición de Transformada de Laplace
- Ejemplos
- Funciones de Orden Exponencial
- Propiedades
- Función de Heaviside o escalón $\mu_{t_0}(t)$
- Función Gamma $\Gamma(x)$

Definición. *Transformación Integral. Dada una función $f(t)$, y una función de dos variables $K(s,t)$, la operación*

$$\int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt$$

define una transfomación integral de $f(t)$, esto es

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt$$

En particular, vamos a considerar transformaciones integrales de la forma

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty K(s,t)\, f(t)\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b K(s,t)\, f(t)\, dt$$

cuando la integral sea convergente

Definición. *Sea $f(t)$ definida en la recta real positiva. La Transformada de Laplace de $f(t)$ está definida como*

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-s\,t}\, f(t)\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,t}\, f(t)\, dt$$

siempre y cuando la integral sea convergente

Ejemplos

- $$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$
- $$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$
- $$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$
- $$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Funciones de Orden Exponencial

Definición. *Una función f es de orden exponencial si existen constantes positivas α, M y T tales que*

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha\, t}, \qquad para \quad t \geq T$$

Ejemplos

- $$|t| \leq e^t$$
- $$|a\, t + b| \leq |a|\,|t| + |b| \leq (|a| + |b|)\, e^t$$
- $$|A \cos(\omega\, t)| \leq |A|\, e^t$$

Para la determinación de la condición es de utilidad graficar las funciones

Las funciones de orden exponencial tienen transformada de Laplace

Propiedades de la Transformada de Laplace

Llamando $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, se cumple:

- Linealidad:

  $$\mathcal{L}[\lambda f + g] = \lambda F(s) + G(s)$$

- Teorema de Traslación en el eje s:

  $$\mathcal{L}[f(t)\, e^{at}] = F(s - a)$$

- Transformada de una derivada:

  $$\mathcal{L}[f'(t)] = s\, F(s) - f(0)$$

  Soporte para aplicar a PVI

- Transformada de una derivada n-ésima:

  $$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\, F(s) - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

- Derivada n-ésima de una Transformada:

  $$\mathcal{L}[t^n\, f(t)] = (-1)^n\, F^{(n)}(s)$$

Función de Heaviside o *escalón*

Definición. *La función escalón o de Heaviside está definida como*

$$u_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Notemos que la función $u_{t_0}(t)$ modeliza un **encendido abrupto** en $t = t_0$

Notemos además que la función $1 - u_{t_0}(t)$ modeliza un **apagado abrupto** abrupto en $t = t_0$

Ejercitación: Construir una función *pulso rectangular* y una *función escalera* usando las funciones de Heaviside

Teorema de Traslación temporal

$$\mathcal{L}[u_{t_0}(t)\, f(t - t_0)] = e^{-t_0\, s}\, F(s)$$

Función $\Gamma(x)$

La función $\Gamma(x)$ está definida, para $x > 0$, a través de

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \int_0^\infty t^{\mathbf{x}-1}\, e^{-t}\, dt$$

Integrando por partes, podemos demostrar que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
Entonces, como $\Gamma(1) = 1$ tenemos que para x es natural,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Propiedades

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma''(x) > 0$. (Donde tiene aprox. su mínimo? Graficar para ver)
- $\Gamma(p) = s^{p+1}\,\mathcal{L}[t^p], \qquad \forall p > -1,\ p \in \mathcal{R}$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, *Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)