Matemáticas Especiales II
Clase 8
Aspectos Geométricos II

Geometría de los cambios de coordenadas

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Aspectos Geométricos II

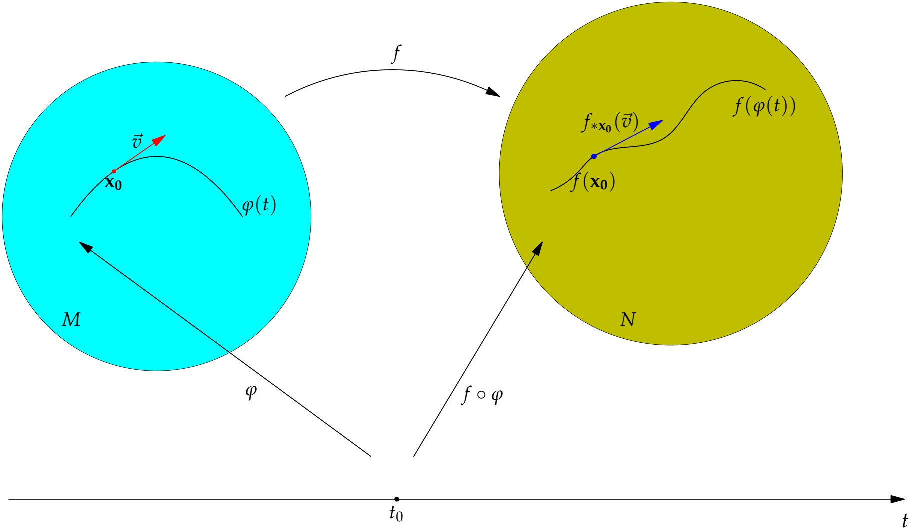
Difeomorfismos y Flujo de Fase

- Transformaciones Diferenciables sobre Vectores y Campos
- Acción de Difeomorfismos sobre Campos Vectoriales
- Generalización del concepto de base para campos vectoriales
- Cambio de Coordenadas en Ecuaciones Diferenciales
- Acción de Difeomorfismos sobre Campos de Dirección
- Acción de Difeomorfismos sobre Flujos de Fase

Consideremos dos dominios M y N de espacios vectoriales. Sea $\vec{v}$ un vector aplicado en un punto $\mathbf{x}$. Este punto además pertenece a una determinada curva, donde $\vec{v}$ es el tangente en ese punto particular. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación. Esta aplicación transforma la curva en otra curva en el conjunto N. En particular, el punto $\mathbf{x}$ lo transforma en N al punto $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. De la misma manera, a cada punto de la curva $\varphi(t)$ transformará en la curva $f(\varphi(t))$.

Denotemos con $f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v})$ al vector en N, transformado de $\vec{v}$.
La imagen del vector $\vec{v}$ bajo la transformación f es el vector velocidad con el que se mueve el punto $f(\varphi(t))$ lleva al punto $\mathbf{x_0}$ que es $\varphi(t_0)$ cuya velocidad es el vector $\vec{v}$.

Graficamente



Funciones Diferenciables

Considerando que la función f es diferenciable en $\mathbf{x_0}$ podemos calcular $f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v})$ a través de

$$f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f(\varphi(t)), \quad \text{con} \quad \varphi(t_0) = \mathbf{x_0}, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi(t) = \vec{v}$$

Observación. No suponer que la derivada termina dando un número, ya que el resultado debe ser el vector en N. Si $M = N = \mathcal{R}^3$ tendremos que $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$

$$f_{\mathbf{x_0}\,*}(\vec{v}) = Df(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{v}$$

donde

$$Df = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

El Espacio Tangente

Definición: El Espacio Tangente. *El conjunto de los vectores velocidad en un punto dado* $\mathbf{x_0}$ *de movimientos que llevan* $\mathbf{x}$ *a través de una parametrización* $\varphi(t)$ *es un espacio vectorial, que posee la misma dimensión que el espacio por donde se lleva a cabo el movimiento,* M*. Este espacio se denomina* *espacio tangente a* M *en el punto* $\mathbf{x_0}$ *y es denotado* $T_{\mathbf{x_0}}M$.

Definición. *El operador lineal* $f_{\mathbf{x_0}*}$ *es denominado* *derivada de la función* f *en el punto* $\mathbf{x_0}$.

Ejemplo: La función de Whitney (función cúspide). Consideremos la función del plano en sí mismo:

$$f(x, y) = (x^3 + xy, y)$$

Primero obtengamos el Jacobiano de f que será la expresión en componentes de la derivada.

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x^2 + y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

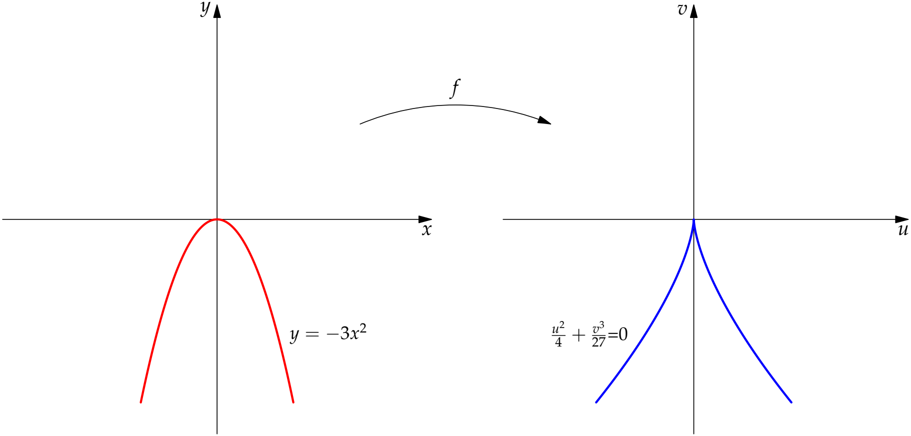
La transformación será degenerada cuando el Jacobiano tenga determinante nulo, por lo que el conjunto del plano donde hay degeneración será $y = -3x^2$.
Al transformar este conjunto a través de f, tendremos (llamando al plano transformado uv),

$$u = -2x^3, \quad v = y$$

Como la condición es que $y = -3x^2$ podemos relacionar u y v eliminando la variable x, donde obtenemos

$$u = -2x^3, \quad v = -3x^2, \quad \rightarrow \quad \frac{u^2}{4} + \frac{v^3}{27} = 0$$

Graficamente



Cambio de coordenadas

Los campos vectoriales definidos a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales son de la forma, para el caso de un sistema autónomo:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(x)$$

Este elemento yace en el espacio tangente $T_{\vec{x}}\mathcal{R}^n$ que por su propia estructura es su propio espacio tangente (el espacio tangente a $\mathcal{R}^n$ es el mismo espacio).

A veces, las simetrías del problema conlleva a elegir un sistema de coordenadas diferentes a las cartesianas.

Por tal motivo, es necesario aplicar la teoría presentada para que los cambios de coordenadas estén enmarcados en la teoría de la acción de difeomorfismos sobre campos.

Sea $\vec{w} \in N$ la imagen del campo vectorial $\vec{v}$ en M bajo la acción del difeomorfismo g, $g : M \to N$. Esto es,

$$\vec{w} = g_*(\vec{v})$$

Bajo estas hipótesis, tenemos el siguiente resultado:

Teorema. *El sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in M$$

y el sistema

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{w}(\vec{y}), \qquad \vec{y} \in N$$

son equivalentes en el sentido de que si $\varphi(t)$ es una solución del primero, $g(\varphi(t))$ es una solución del segundo, y viceversa.

Ejemplo: Polares I

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

Si pasamos a coordenadas polares, $x = \rho\cos(\theta)$ y $y = \rho\sin(\theta)$. La forma más artesanal es calcular, a partir del cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho}\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\dot{\theta} = \underbrace{\rho\sin(\theta)}_{y} \\ \dot{y} &= \dot{\rho}\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\dot{\theta} = \underbrace{-\rho\cos(\theta)}_{-x} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema en $\dot{\rho}$ y en $\dot{\theta}$ obtenemos

$$\dot{\rho} = 0, \qquad \dot{\theta} = -1$$

Ejemplo: Polares II

El difeomorfismo g viene definido como $g : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R} \times [0, 2\pi]$ a partir de

$$g(x, y) = (r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right))$$

Apliquemos ahora el g_* al campo vectorial $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$.

Entonces, aplicando el difeomorfismo al campo, tenemos

$$g_*(\vec{v}(\vec{x})) = Dg \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = v_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

que produce el sistema de ecuaciones

$$\dot{\rho} = 0, \qquad \dot{\theta} = -1$$

cuya solución, es,

$$\rho(t) = \rho_0, \qquad \theta(t) = \theta_0 - t$$

retornando a las variables cartesianas, tenemos como solución

$$x(t) = \rho_0 \cos(\theta_0 - t), \qquad y(t) = \rho_0 \sin(\theta_0 - t)$$

Ciclos Límites. Atractores

Otro Ejemplo. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x\,(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Si queremos expresar el sistema en coordenadas polares, aplicamos el mismo difeomorfismo que en el ejemplo anterior, así que la aplicación del g_* se efectúa con la misma matrix jacobiana, entonces,

$$g_*(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y + x\,(1 - x^2 - y^2) \\ -x + y\,(1 - x^2 - y^2) \end{bmatrix}$$

Haciendo el producto, resulta facilmente

$$g_*(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \rho(1 - \rho^2) \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema en polares resulta

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\theta} &= -1 \end{aligned}$$

La Solución

Cuyas soluciones son, a saber

$$\begin{aligned} \rho(t) &= c\frac{e^t}{\sqrt{1+c^2e^{2t}}} \\ \theta(t) &= \theta_0 - t \end{aligned}$$

Podemos notar que la curva $\lim_{t\to\infty}\rho(t) = 1$. Esta curva se la denomina *ciclo límite*. También este efecto se lo conoce como *atractor*.

Bibliografía utilizada y recomendada

[1] Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer. (1991)

[2] Arnol'd, Vladimir I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer. (1980)

[3] Doering, Claus I., Lopes, Arthur O. *Equações Diferenciais Ordinárias*, Ed. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA. (2005).

[4] Hurewicz, Witold. *Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ediciones RIALP, Madrid. (1958).