Matemáticas Especiales II
Clase 7
Aspectos Geométricos I

Difeomorfismos y Flujo de Fase

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Aspectos Geométricos I

Difeomorfismos y Flujo de Fase

- Grupo de Transformaciones
- Grupo de Difeomorfismos uno-paramétricos
- Ejemplos
- El Campo Vectorial Velocidad de Fase
- Flujo de Fases como solución de Ecuaciones Diferenciales

Grupo de Transformaciones

Definición. *Una transformación sobre un conjunto M es una aplicación biyectiva de M en M.*

Con esta definición podemos notar que

- $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, definida como $f(x) = x^2$ no es una transformación.
- $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, definida como $f(x) = x^3$ es una transformación.
- $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, definida como $f(z) = z^4$ no es una transformación.

En el conjunto de transformaciones vamos a definir un producto $f \cdot g$ a partir de la composición:

$$(f \cdot g)(x) = f(g(x))$$

Con esta definición, satisface la propiedad de grupo.

Definición. *Una función $\varphi : G \to H$ de un grupo en otro se denomina homomorfismo asocia producto a productos en la imagen e inversa en inversa en la imagen. Esto es,*

$$\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g), \qquad \varphi(f^{-1}) = (\varphi(f))^{-1}$$

Grupo uno-paramétrico de Transformaciones

Un grupo uno-paramétrico de transformaciones es una aplicación de los reales al grupo de transformaciones, esto es:

$$t \quad \to \quad g^t, \qquad \text{con } g^t \text{ una transformación en el conjunto } M$$

que satisface

a) $g^{t+s} = g^t \cdot g^s$

b) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$

Notemos que a partir de la propiedad a), g^0 es la transformación identidad. En el contexto de las ecuaciones diferenciales, t es el tiempo y g^t es la evolución temporal.

Ejemplo. Consideremos $M = \mathcal{R}$ y g^t una traslación por $3t$, entonces

$$g^t(x) = x + 3t$$

En cambio si el conjunto M es $\mathcal{R}$ y g^t viene dada por

$$g^t(x) = x \cos(t)$$

no satisface las propiedades.

En el contexto de los sistemas provenientes de la dinámica teórica, es común denominar al grupo uno-paramétrico de transformaciones g^t como *flujo de fases*, donde el conjunto M donde actúa el grupo se denomina *espacio de fases*. Además, variando el parámetro t tenemos las denominadas *órbitas* o *trayectorias*.

Grupo de Difeomorfismos uno-paramétricos Un difeomorfirmo es una

aplicación biyectiva donde tanto la función como su inversa son diferenciables.

Un grupo de difeomorfismos uno-paramétricos es el grupo de transformaciones donde $g^t(x)$ es un difeomorfismo, tanto en la variable x y en el parámetro t.

Sistemas Lineales Homogéneos

Dado un sistema lineal homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\vec{x}, \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

La solución del problema de valor inicial viene dada, como se ha visto

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t, t_0)\,\vec{x}_0, \qquad \mathbf{\Psi}(t, t_0) = \mathbf{U}(t)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0)$$

donde $\mathbf{U(t)}$ es la *matriz fundamental*.

Para este problema, definamos $g^t = \mathbf{\Psi}(t, t_0)$
Notemos que

- $g^{t_0} = \mathbf{\Psi}(t, t_0) = \mathbf{U}(t_0)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$
- $g^{t_2} g^{t_1} = \mathbf{\Psi}(t_2 + t_1, t_1)\mathbf{\Psi}(t_1, t_0) = \mathbf{U}(t_2 + t_1)\,\mathbf{U}^{-1}(t_1)\mathbf{U}(t_1)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0) = \mathbf{\Psi}(t_2 + t_1, t_0) = \mathbf{U}(t_2 + t_1)\,\mathbf{U}^{-1}(t_0) = g^{t_2+t_1}$

Como se ha visto, entonces, la evolución temporal es el grupo uno-paramétrico de difeomorfismos. En este caso, la identidad está asociada a g^{t_0} y no a g^0, pero eso se debe a que la condición inicial se fija en t_0 y no en $t = 0$.

El Campo Velocidad de Fase

Con la definición de flujo de fase, definido a partir del grupo de difeomorfismos uno-paramétricos, vamos a definir el *campo vectorial velocidad de fase*.

Dado el conjunto M (en el contexto de la geometría de las ecuaciones diferenciales, este conjunto debe tener una estructura de *variedad diferenciable*) y dado la transformación g^t, vamos a introducir el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h}$$

En virtud de la propiedad de grupo, podemos escribir

$$\frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h} = \frac{g^h\left[g^t(\mathbf{x})\right] - \left[g^t(\mathbf{x})\right]}{h} = \frac{g^{0+h}\left[g^t(\mathbf{x})\right] - g^0\left[g^t(\mathbf{x})\right]}{h}$$

Si llamamos $\mathbf{y} = g^t(\mathbf{x})$ podemos escribir

$$\lim_{h \to 0} \frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h} = \frac{g^{0+h}(\mathbf{y}) - g^0(\mathbf{y})}{h}$$

Con esta relación, vamos a definir el *campo velocidad de fase*

El Campo Velocidad de Fase. *Continuación*

Con esta relación, vamos a definir el *campo velocidad de fase*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{g^{t+h}(\mathbf{x}) - g^t(\mathbf{x})}{h} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left[g^t(\mathbf{x})\right]$$

Ejemplo. Consideremos el flujo de fase

$$g^t : \mathcal{R} \to \mathcal{R}, \qquad g^t(x) = e^{\lambda t} x$$

Calculando la derivada, tenemos

$$\frac{d}{dt} g^t(x) = \lambda e^{\lambda t} x$$

Entonces, evaluando en $t = 0$, como plantea la definición, tenemos

$$v(x) = \lambda e^{\lambda 0} x, \qquad \to \qquad v(x) = \lambda x$$

El Campo Velocidad de Fase. *Continuación*

Ejemplo. Consideremos ahora, el flujo de fase definido en $\mathcal{R}^2$

$$g^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Derivando, tenemos

$$\frac{d}{dt} g^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Evaluando en $t = 0$, tenemos finalmente

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} v_x = y \\ v_y = -x \end{array}$$

Flujo de Fase como Solución de Ecuaciones Diferenciales

Si consideramos un punto particular de $M = \mathcal{R}^n$, llamémoslo $\vec{x}_0$ y sea la transformación

$$\varphi(t) = g^t(\vec{x}_0)$$

Entonces podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema. *La función $\varphi(t)$ definida como $\varphi(t) = g^t(\vec{x}_0)$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}) \quad \textit{con condición inicial} \quad \varphi(0) = \vec{x}_0$$

En efecto, consideremos

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g^{t+h}(\vec{x}_0) - g^t(\vec{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g^h[g^t(\vec{x}_0)] - g^0[g^t(\vec{x}_0)]}{h} = \vec{v}(\vec{x})$$

Entonces,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}), \qquad \text{con la condición,} \qquad g^{t_0}(\vec{x}_0) = Id(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$$

Con este resultado, a cada difeomorfismo uno-paramétrico podemos asociar un problema de valor inicial, y viceversa.

Relación entre Ec. Diferencial y Flujo de Fase

Definición. *El flujo de fase de la ecuación diferencial* $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ *es el grupo de difeomorfismos uno-paramétrico para el cual* $\vec{v}$ *es el campo vectorial velocidad de fase.*

Ejemplo. Encontremos la expresión del flujo de fase para la ecuación diferencial

$$v(x) = x^2, \qquad \text{con condición inicial en } t = 0$$

Dada la separabilidad de la ecuación, podemos resolver trivialmente

$$-\frac{1}{x} = t + C, \quad \rightarrow \quad C = -\frac{1}{x_0}$$

Con lo cual, el flujo de fase es el difeomorfismo uno-paramétrico

$$x(t) = g^t(x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0\, t}$$

Bibliografía utilizada y recomendada

[1] Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer. (1991)

[2] Arnol'd, Vladimir I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer. (1980)

[3] Doering, Claus I., Lopes, Arthur O. *Equações Diferenciais Ordinárias*, Ed. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA. (2005).

[4] Hurewicz, Witold. *Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ediciones RIALP, Madrid. (1958).