

Matemáticas Especiales II

Clase 6

Sistemas No Lineales

Estabilidad Lineal

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Sistemas No Lineales

Estabilidad Lineal

- Introducción. Soluciones en Serie
- Linealización. Comportamiento local
- Puntos de Equilibrio. Análisis de Estabilidad
- El plano de fase. Producto Directo
- Aplicación:
 - Predador-Presa (Modelo de Lotka-Volterra)
 - Especies Competidoras
- Integrales Primeras
- Sistemas Hamiltonianos

Introducción. Construcción de Soluciones Formales

Consideremos el PVI

$$\frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}; t), \quad x_\ell(t_0) = x_{\ell,0} \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Si además, las funciones f_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, n$) no dependen de la variable independiente, t , el sistema se llama **autónomo**. Entonces, un sistema autónomo se escribe

$$\frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}), \quad x_\ell(t_0) = x_{\ell,0} \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Construcción de solución formal

En el caso de querer obtener una solución al sistema para cada t el PVI nos provee todo lo que necesitamos para construir, hasta el orden deseado, el polinomio de Taylor

$$x_j(t) = x_j(t_0) + \frac{dx_j(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2}(t - t_0)^2 + \dots$$

Los coeficientes para sistemas autónomos

- Orden 0:

$$x_j(t_0) = x_{j0} \quad (\text{Cond. Inicial})$$

- Orden 1:

$$\frac{dx_j(t_0)}{dt} = f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0), \quad (\text{Ec. Diferencial})$$

- Orden 2:

$$\frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial x_k} \frac{dx_k(t_0)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}(t_0), t_0)$$

Y así sucesivamente

Podemos notar que si bien el cálculo de las derivadas sucesivas se hace cada vez más engorroso, nada nos impide hacerlo.

Intervalo de Confianza de solución aproximada

Pregunta:

Si la solución del Problema de Valor Inicial tiene un intervalo en t de analiticidad $|t - t_0| < \tau$, cuál será el intervalo de confianza de la solución aproximada?

Es decir, si llamamos $\tilde{\mathbf{x}}$ a la solución aproximada, cuál será el intervalo de tiempo

$$|t - t_0| < \delta$$

en el que podamos afirmar que

$$|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon$$

Pensar en este asunto...

Otra Aproximación: Linealización

Otra aproximación al PVI es a partir de la linealización, es decir, dado el PVI Consideremos el PVI

$$\frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}), \quad x_\ell(t_0) = x_{\ell,0} \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Desarrollando las funciones $f_\ell(\mathbf{x})$ a primer orden alrededor del punto inicial, tendremos

$$f_\ell(\mathbf{x}) \approx f_\ell(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) (x_k - x_{k,0})$$

Entonces, el problema linealizado lo podemos escribir matricialmente

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0) \mathbf{x}^t + \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0^t}_{\text{constante, no influye sustancialmente}}$$

donde $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ y $\mathbf{D}[\mathbf{F}]$ es el Jacobiano de \mathbf{F}

Definición. Dado el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

diremos que \mathbf{x}_0 es un **punto crítico** si y sólo si $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ Entonces, un punto crítico es un punto de equilibrio, en términos dinámicos, ya que si la condición inicial coincide con el punto crítico, se tendrá que $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$ Entonces, definiendo el vector $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ podemos linealizar alrededor del punto crítico y obtener el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$$

Entonces el vector \mathbf{u} indica el comportamiento (en la aproximación lineal) alrededor del punto de equilibrio

Consideremos como hipótesis que la matriz $\mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)$ es diagonalizable. Entonces se tiene



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

Si y solo si los autovalores de $\mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)$ tienen parte real negativa.

- $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ si y sólo si los autovalores de $\mathbf{D}[\mathbf{F}](\mathbf{x}_0)$ son imaginarios puros
- En todos los casos restantes, existirá una dirección para la cual, cualquier punto inicial -aún muy próximo al punto de equilibrio- crecerá más allá de toda cota.

Caso $n = 2$: El plano de fase

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

Si bien, lo que se busca es una solución $x(t)$ e $y(t)$, es en muchos casos de gran utilidad el estudio del plano xy , también llamado **plano de fase**. Notemos que la ecuación que relaciona a x e y (para sistemas autónomos) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad \implies \quad y'(x) = f(x, y) \quad (\text{una única ecuación})$$

Cuidado: Este análisis estudia exclusivamente aspectos geométricos en el plano xy pero no nos proporciona la solución, $x(t)$ e $y(t)$, ya que eliminamos la variable t

Consideremos un par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(y)$$

donde en principio, x e y no tienen relación.

Definición. Dadas las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(y)$$

el producto directo será el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(y) \end{cases}$$

cuyo plano de fases será el producto cartesiano entre x e y .

Ejemplo

Notemos que a partir del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(y) \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones puede resolverse por variables separables

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f_1(x)} dx = \int_{t_0}^t dt$$

y lo mismo para y

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{f_2(y)} dy = \int_{t_0}^t dt$$

Lo que nos permite escribir, para el producto directo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f_1(x)} dx = t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{f_2(y)} dy$$

y tratar a x e y en el mismo plano, cuya ecuación $y' = f(x, y)$ es a variable separable.

Modelo Predador-Presa de Lotka-Volterra

Modelización. Sea y la cantidad de individuos de una especie depredadora e x de una especie que es presa de y . Veamos cómo podemos construir un modelo de evolución ecológica:

- Si la presa no tiene depredadores, su cantidad evoluciona según el modelo:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (a > 0)$$

- Si el depredador no tiene presa para comer, su cantidad (decreciente por hambre) evoluciona según el modelo:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \quad (c > 0)$$

A partir de este análisis, podemos considerar el sistema *predador-presa* en la interacción entre ambas especies

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx) \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

Estudio Cualitativo del Modelo Predador-Presa.

1. Puntos Críticos. Los puntos de equilibrio ecológico son fáciles de obtener: $(0, 0)$ y $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

2. Linealización. La linealización entorno al origen es trivial, ya que es el modelo desacoplado. La presa crece exponencialmente y el predador decrece exponencialmente

La linealización entorno al punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ define el sistema (llamando $u = x - \frac{c}{d}$ y $v = y - \frac{a}{b}$):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{bc}{d} v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ad}{b} u \end{cases}$$

La ecuación característica es $\lambda^2 + ac = 0$, y como a y c son positivos, tenemos $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$ y como son imaginarios puros, tendremos que entorno al punto de equilibrio la solución es periódica. Es decir, que este estado de equilibrio se podría llamar de sustentable

Método del Producto Directo. Plano de Fase

Si consideramos el sistema completo, sin simplificaciones, tenemos (recordemos que todos los coeficientes son positivos)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy = y(-c + dx) \end{cases}$$

Dividiendo a ambos miembros, obtenemos la ecuación geométrica en el plano de fase

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(a - by)} \frac{(-c + dx)}{x} \quad \text{variables separables!}$$

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{(-c + dx)}{x} dx$$

Entonces,

$$a \ln(y) - by + c \ln(x) - dx = C \quad (C \text{ cerrada! comprobar})$$

Especies Competidoras

De la misma manera con la que analizamos el modelo predador-presa podemos estudiar el problema en el cual dos especies compiten por el mismo alimento (esto puede ser también llevado al contexto de la economía, por ejemplo)

El sistema de ecuaciones que modeliza este problema es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ \frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) \end{cases}$$

donde los parámetros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$ son todos positivos.

De manera análoga a los estudiado para el modelo de predador-presa, podemos comenzar con los puntos críticos, estudiar la dinámica en la vecindad de estos puntos, etc.

Como ejemplo, dejamos para estudiar

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}x\right) \end{cases}$$

Integrales Primeras (Muy introductorio)

Consideremos un problema con $n = 2$, es decir, de dos ecuaciones

diferenciales con dos incógnitas $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$ Notemos que si

multiplicamos la primera ecuación por $Q(x, y)$ y la segunda por $P(x, y)$ y restamos obtenemos

$$P(x, y) \frac{dy}{dt} - Q(x, y) \frac{dx}{dt} = 0$$

Si la ecuación es, además, exacta, es decir que existe una función $H(x, y)$, tal que

$$P(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \quad Q(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$$

podemos obtener

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dH(x, y)}{dt} = 0 \implies H(x, y) = Cte$$

Integrales Primeras y Sistemas Hamiltonianos

Al encontrar la función H , encontramos una función de las dos variables (que evolucionan según el sistema de ecuaciones diferenciales) decimos que H es una integral primera del sistema.

En general, para un sistema de dimensión n una *integral primera* es una relación de todas las variables que se mantiene constante. Notemos que por cada integral primera, podemos reducir en una "dimensión" el sistema original.

Volviendo al caso donde encontramos la integral primera $H(x, y) = Cte$, encontramos que las ecuaciones diferenciales pueden escribirse a partir de la propia función H ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones se denomina **Ecuaciones de Hamilton** las cuales surgen del estudio de la *Mecánica Clásica* y son de amplia aplicación en la *Mecánica Celeste*

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer (1992)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)