Matemáticas Especiales II
Clase 4
Método de Picard

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Método de Picard para Ecuaciones Diferenciales

- Definiciones. Iteraciones
- Esquema de Iteración para Sistemas de Ec. Diferenciales
- Condición de Lipschitz
- Estudio de Convergencia

Esquemas Iterativos

Definición. Un esquema iterativo es un procedimiento secuencial que procura aproximar una determinada cantidad a partir de una repetición de operaciones con la cantidad obtenida en el paso anterior. Este método también es denominado de aproximaciones sucesivas.

Ejemplo: Resolver la ecuación $3x - \cos(x) = 0$. La solución es $x \approx 0.3167513$. Si despejamos de manera *"ingenua"* $x = \frac{\cos(x)}{3}$, y definimos la sucesión $x_0 = 0$, $x_{\ell+1} = \frac{\cos(x_\ell)}{3}$ entonces

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\cos(0)}{3} = 0.3333333 \\
x_2 &= \frac{\cos(0.3333333)}{3} = 0.3149857 \\
x_3 &= \frac{\cos(0.3149857)}{3} = 0.31693360 \\
x_4 &= \frac{\cos(0.31693360)}{3} = 0.31673184 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Ya x_4 tiene 4 decimales correctos!

Análisis de Convergencia de Iteraciones

En general, un esquema iterativo se puede representar como, dada una aproximación inicial, x_0,

$$x_{\ell+1} = \varphi(x_\ell)$$

Si llamamos α a la solución exacta al problema en cuestión, podemos desarrollar la función de iteración alrededor de α

$$x_{\ell+1} = \varphi(x_\ell) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\xi)\,(x_\ell - \alpha), \qquad \xi \in (\alpha - x_\ell, \alpha + x_\ell)$$

el error en la aproximación ℓ-ésima será $\varepsilon_\ell = x_\ell - \alpha$ y por definición, tendremos, $\alpha = \varphi(\alpha)$

$$\varepsilon_{\ell+1} = \left[\varphi(\alpha) + \varphi'(\xi)\,(x_\ell - \alpha)\right] - \alpha$$

Entonces,tendremos

$$|\varepsilon_{\ell+1}| = |\varphi'(\xi)|\,|x_\ell - \alpha| = |\varphi'(\xi)|\,|\varepsilon_\ell|$$

Sea M una cota uniforme de la derivada de $\varphi'(x)$ podemos escribir

$$|\varepsilon_\ell| \leq M^\ell |\varepsilon_0| \qquad \text{Entonces, si } M < 1 \rightarrow \lim_{\ell\to\infty} \varepsilon_\ell = 0$$

A tener en cuenta...

Dado un esquema iterativo, también denominado *iteración funcional*.

Se debe satisfacer:

- Definir una función de iteración
- Que para x_ℓ pueda calcularse el $x_{\ell+1}$
- Que la sucesión sea convergente
- Que

$$\lim_{\ell \to \infty} |x_\ell - \alpha| = 0$$

donde α es el valor solución

En general, la función de iteración se obtiene de un *"despeje"* funcional, no en el sentido estricto de despejar para resolver.

Iteración para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx_\ell}{dt} = f_\ell(\mathbf{x}; t), & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_\ell(t_0) = x_{\ell\,0} \end{cases}$$

Un *"despeje"* sería, integrando a ambos miembros

$$x_\ell(t) - x_{\ell\,0} = \int_{t_0}^{t} \frac{dx_\ell}{dt}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} f_\ell(\mathbf{x}(t'); t')\, dt'$$

La $x_\ell(t)$ despejada satisface la ecuación diferencial (demostrar esto). Lo que implica que podemos definir un esquema de iteración funcional

$$\begin{cases} x_\ell^{(0)}(t) = x_{\ell\,0} \\ x_\ell^{(n+1)}(t) = x_{\ell\,0} + \int_{t_0}^{t} f_\ell(\mathbf{x}_\ell^{(n)}(t'); t')\, dt' \end{cases}$$

Teorema de Picard: Caso $n = 1$

Para entender como funciona el esquema iterativo, comencemos con el caso unidimensional

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $f(x, t) : |x - x_0| \leq a \times |t - t_0| \leq T \to \mathcal{R}$ en principio, continua en la región.

Entonces, el esquema iterativo será

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{\ell+1}(t) = x_0 \, + \, \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t') \, dt' \end{cases}$$

Un Ejemplo para ver como funciona

A modo de ver el funcionamiento del esquema iterativo, analicemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

El esquema iterativo será,

$$\begin{cases} x_0(t) = a \\ x_{\ell+1}(t) = a + \int_{t_0}^{t} x_\ell(t')\,dt' \end{cases}$$

Entonces, la sucesión es:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= a \\
x_1(t) &= a + \int_{t_0}^{t} x_0(t')\,dt' = a + \int_{t_0}^{t} a\,dt' = a + a\,(t - t_0) \\
x_2(t) &= a + \int_{t_0}^{t} x_1(t')\,dt' = a + \int_{t_0}^{t} [a + a\,(t - t_0)]\,dt' = a + a\,(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2} \\
x_3(t) &= a + \int_{t_0}^{t} x_2(t')\,dt' = a + \int_{t_0}^{t} \left[a + a\,(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2}\right] dt' = a\left[1 + (t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} + \frac{(t - t_0)^3}{3!}\right] \\
\vdots &= \vdots \\
x_n(t) &= a\sum_{j=0}^{n} \frac{(t - t_0)^n}{n!}, \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = a\,e^{(t - t_0)}
\end{aligned}$$

Sobre la iteración. Continuidad de las funciones iteradas

Hemos visto que un esquema iterativo tiene sentido si la iteración puede efectuarse infinitamente, es decir, no se trunca.
Veamos que todas las funciones iteradas son continuas en el intervalo $|t - t_0| \leq \alpha = \min\{T, \frac{a}{M}\}$, donde M es el máximo de la función f en la región de definición (que como es un intervalo cerrado y acotado, tendrá su máximo absoluto). Veamos: Para la primera función iterada, tendremos

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0(t'), t')| \, dt' \leq M \, |t - t_0| \leq a$$

esto indica que $x_1(t)$ yace sobre el dominio de definición de f, por lo que podemos integrar para obtener la próxima iteración. Además, $x_0 = x_\ell(t_0)$ para todo ℓ, por lo que en particular, si $|t - t_0| < \delta$ entonces

$$|x_1(t) - x_1(0)| < \varepsilon$$

Por inducción probamos que $\forall \ell$, $x_\ell(t)$ es continua en t_0

Condición de Lipschitz

Dada una función $f(x,t)$, decimos que satisface la condición de Lipschitiz si existe una constante positiva L tal que satisface

$$|f(x_2,t) - f(x_1,t)| \leq L\,|x_2 - x_1|$$

Una condición suficiente para que una función sea Lipschitz es que su derivada parcial sea continua, veamos. Si la derivada parcial es continua, podemos escribir

$$|f(x_2,t) - f(x_1,t)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,t)\right| \, dx^* \leq L\,|x_2 - x_1|$$

donde L es una cota para la derivada parcial.

Convergencia de la Sucesión

Asumamos que la función $f(x,t)$ es Lipschitz y calculemos $|x_2(t) - x_1(t)|$

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(x_1(t'), t') - f(x_0(t'), t') \right] \, dt'$$

Ya habíamos demostrado

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_0(t'), t')| \, dt' \leq M \, |t - t_0|$$

Además, como es de Lipschitz, podemos acotar

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_1(t'), t') - f(x_0(t'), t')| \, dt' \leq L \, |x_1(t) - x_0(t)| \leq L \, M \int_{t_0}^{t} |t - t_0| \, dt' = L \, M \, \frac{|t - t_0|^2}{2} \leq M \, L \, \frac{\alpha^2}{2}$$

Análogamente,

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq L \, M^2 \, \frac{|t - t_0|^3}{3!} = \frac{L}{M} \, \frac{(M|t - t_0|)^3}{3!} \leq \frac{M}{L} \, \frac{L^3 \alpha^3}{3!}$$

En general, podemos demostrar por inducción

$$|x_\ell(t) - x_{\ell-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{\left[L|t - t_0| \right]^\ell}{\ell!} \leq \frac{M}{L} \frac{\left[L\alpha \right]^\ell}{\ell!}$$

Límite de la Sucesión

Sea $x(t) = \lim_{\ell\to\infty} x_\ell(t)$ y calculemos $|x(t) - x_\ell(t)|$ Primero notemos que podemos escribir

$$x_\ell(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{\ell} \left[x_j(t) - x_{j-1}(t)\right]$$

y, por definición,

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \left[x_j(t) - x_{j-1}(t)\right]$$

Entonces, tenemos

$$x(t) - x_\ell(t) = \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \left[x_j(t) - x_{j-1}(t)\right]$$

Calculando el valor absoluto,

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} |x_j(t) - x_{j-1}(t)| \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \frac{M}{L} \, \frac{(L\,\alpha)^j}{j!}$$

Si reescribimos esta sumatoria para que comience con $j = 0$

$$|x(t) - x_\ell(t)| \leq \frac{M}{L} \, \frac{(L\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(L\,\alpha)^j}{j!} = \frac{M}{L} \, \frac{(L\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{L\,\alpha}$$

El Límite de la Sucesión es solución!

Habiendo probado la convergencia, resta probar que la función a la cual converge es justamente solución del PVI

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt'$$

como ya comprobamos que $\lim_{\ell \to \infty} x_\ell(t) = x(t)$ sólo falta demostrar que

$$\lim_{\ell \to \infty} \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\, dt' = \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt'$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt' - \int_{t_0}^{t} f(x_\ell(t'), t')\, dt' \right| &\leq L \int_{t_0}^{t} |x(t') - x_\ell(t')|\, dt' \\ &\leq \frac{L}{M} \frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{M\,\alpha} \int_{t_0}^{t} dt' \\ &\leq \frac{L}{M} \frac{(M\,\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{M\,\alpha}\, \alpha \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando ℓ tiende a infinito.

Esto concluye la demostración de la convergencia del Método de Picard.

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Goursat, Edouard. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)
- Ince, Edward L. Ordinary Differential Equations, Ed. Dover (1956)