Matemáticas Especiales II
Clase 3
Teorema de Cauchy para Sistemas de Ec. Diferenciales

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Teorema de Cauchy para Sistemas de Ec. Diferenciales

- Definiciones. Problema de Cauchy
- Ejemplos
- Construcción de una Serie Formal
- Integral de Cauchy para funciones de *n* variables complejas
- Teorema de Cauchy. Soluciones Analíticas

Definición de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden. Problema de Cauchy

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es un conjunto de n ecuaciones

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

Si además imponemos

$$x_j(t_0) = x_{j\,0}$$

decimos que es un problema de valor inicial, PVI, o *problema de Cauchy*
Entonces, un PVI será

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) & j = 1, 2, \ldots n \\ x_j(t_0) = x_{j\,0} \end{cases}$$

Ejemplos

- **Modelo Predador-Presa**: Sea x la cantidad de predadores e y la cantidad de presas la evolución temporal del sistema es modelizada (ecuaciones de Lotka-Volterra). Puede representar vacunas-virus, etc.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(-\alpha + \beta y) & \alpha, \beta \in \mathcal{R} \\ \frac{dy}{dt} = y(\gamma - \delta x) & \gamma, \delta \in \mathcal{R} \end{cases}$$

- **Efecto de marea para un planeta** Las variaciones en el semieje de la órbita y en la excentricidad por efecto de marea producida por una estrella central es

$$\begin{cases} \langle \frac{da}{dt} \rangle = -\frac{4}{3} \frac{n}{a^4} \left[(1 + 23e^2 + 7e^2 D) \right] & \\ \langle \frac{de}{dt} \rangle = -\frac{2}{3} \frac{n}{a^5} [9 + 7D] & D = D(m, R, r) \end{cases}$$

Construcción de Solución mediante serie formal

Sea $x_j(t)$ una función analítica de t (después entraremos en detalles) entonces, admite una representación en serie de Taylor

$$x_j(t) = x_j(t_0) + \frac{dx_j(t_0)}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2}(t - t_0)^2 + \cdots$$

Podemos notar que cada uno de los coeficientes del desarrollo puede ser obtenido a partir del PVI.

- $x_j(t_0) = x_{j\,0}$
- $\frac{dx_j(t_0)}{dt} = f_j(\mathbf{x}(t_0), t_0)$
- $\frac{d^2x_j(t_0)}{dt^2} = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial x_k}\frac{dx_k(t_0)}{dt} = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}(t_0),t_0)}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}(t_0), t_0)$

Y así sucesivamente. Lo que significa, que el propio PVI nos permite construir la serie de Taylor, aunque el cálculo de coeficientes sea cada vez más engorroso

Ejemplo: Solución a orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(-0.3 + 0.01y), & x(0) = 9 \\ \frac{dy}{dt} = y(0.1 - 0.02x), & y(0) = 40 \end{cases}$$

Tenemos, $x(0) = 9$, $y(0) = 40$. Además reemplazando estos valores en el propio sistema, tendremos $\frac{dx}{dt}(0) = 0.9$ y $\frac{dy}{dt}(0) = -6.8$
Ahora,

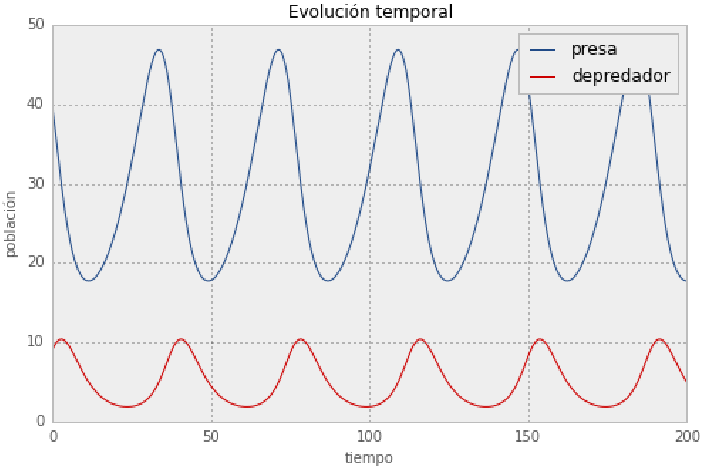
$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{dx}{dt}(-0.1 + 0.2\,y) + x\,0.2\frac{dy}{dt} \to \frac{d^2x}{dt}(0) = -5.13$$

$$\frac{d^2y}{dt} = \frac{dy}{dt}(0.01 - 0.02\,x) - y\,0.02\frac{dx}{dt} \to \frac{d^2y}{dt}(0) = 0.436$$

Entonces, hasta orden 2 tendremos

$$\begin{cases} x(t) = 9 + 0.9\,t - 2.565\,t^2 \\ y(t) = 40 - 6.8\,t - 2.28\,t^2 \end{cases}$$

Gráfico de la solución exacta



Repaso de la Integral de Cauchy en varias variables

Sea $f(z) : U \subset \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{D}$ y $z_0 \in \mathcal{D}$ Entonces la derivada $n-$ésima se calcula a partir de la fórmula de Cauchy

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Si consideramos una función de n variables $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ tenemos

$$\frac{1}{j_1! j_2! \ldots j_n!}\frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots j_n} f}{\partial z_1^{j_1}\partial z_2^{j_2}\ldots\partial z_n^{j_n}}(z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{1}{(2\pi\, i)^n}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\ldots\oint_{\gamma_n}\frac{f(z_1', z_2', \ldots z_n')\; dz_1' dz_2' \ldots dz_n'}{(z_1' - z_1)^{j_1+1}(z_1' - z_2)^{j_2+1}\ldots(z_1' - z_n)^{j_n+1}}$$

donde cada curva está en los planos complejos asociados a cada variable y donde la región se supone

$$\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$$

Función Mayorante

Con lo anterior, dado el PVI, supongamos que las funciones $f_j(\mathbf{x}; t)$ vamos a suponer:

- Las funciones f_j son analíticas en el dominio $\mathcal{D}'$ definido por $\mathcal{D}' : |x_j - x_{j\,0}| < r'_j, \quad |t - t_0| < \rho'$ Entonces admiten un desarrollo de Taylor

$$f_j(\mathbf{x}; t) = \sum_{j_t, j_1, j_2, \ldots, j_n = 0}^{\infty} c_{j_t, j_1, j_2, \ldots, j_n} (t - t_0)^{j_t} (x_1 - x_{1\,0})^{j_1} (x_2 - x_{2\,0})^{j_2} \cdots (x_n - x_{n\,0})^{j_n}$$

- Todas las funciones f_j poseen una **misma** función *mayorante*

$$|f_j(\mathbf{x}; t)| < \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{1\,0}) + (x_2 - x_{2\,0}) + \cdots + (x_n - x_{n\,0})}{r}\right] \left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)}, \qquad M = \max_j \{M_1, M_2, \ldots M_n\}$$

en el conjunto cerrado $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ definido por

$$\mathcal{D} : |x_j - x_{j\,0}| \leq r < \min\{r'_1, r'_2, \ldots, r'_n\}, \qquad |t - t_0| \leq \rho < \rho'$$

Sistema Auxiliar y Reducción

A partir de las propiedades de las funciones que definen el PVI, podemos construir un sistema auxiliar

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{1\,0}) + (x_2 - x_{2\,0}) + \cdots + (x_n - x_{n\,0})}{r}\right]\left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)} \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{1\,0}) + (x_2 - x_{2\,0}) + \cdots + (x_n - x_{n\,0})}{r}\right]\left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)} \\
\vdots &= \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= \frac{M}{\left[1 - \frac{(x_1 - x_{1\,0}) + (x_2 - x_{2\,0}) + \cdots + (x_n - x_{n\,0})}{r}\right]\left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)}
\end{aligned}$$

Notando que todas las ecuaciones diferenciales son iguales para cada variable, si hacemos el siguiente cambio de variables $\xi = x_1 - x_{1\,0} = x_2 - x_{2\,0} = \ldots = x_1 - x_{1\,0}$ podemos reducir todo a una sola ecuación

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{n\xi}{r}\right)\left(1 - \frac{t - t_0}{\rho}\right)}, \qquad \xi(t_0) = 0$$

La ecuación auxiliar obtenida

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{n\xi}{r}\right)\left(1 - \frac{t-t_0}{\rho}\right)}, \qquad \xi(t_0) = 0$$

Tiene por solución (de obtención trivial, por variables separabes)

$$\xi(t) = \frac{r}{n}\left[1 - \sqrt{1 + 2M\,n\frac{\rho}{r}\log\left(1 - \frac{t-t_0}{\rho}\right)}\right]$$

Donde el dominio de analiticidad es

$$|t - t_0| \leq \rho\left[1 - e^{\left(-\frac{1}{2M\,n}\frac{r}{\rho}\right)}\right]$$

Es más, si el sistema es autónomo (no depende de t) el dominio será

$$|t - t_0| \leq \frac{r}{2M\,n}$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Moulton, Forest R. *Differential Equations*, Ed. Dover (1958)
- Goursat, E. *A Cours D'Analyse Mathématique*, Vol. II, Parte I Ed. Gauthier-Villars, (1902)
- Arnol'd, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations*, Ed. Springer Verlag (1962)
- Forsyth, Andrew R. *Theory of Differential Equations*, Vol. II, Parte II Ed. Cambridge Academic Press (1900)