

Matemáticas Especiales II
Clase 25
Teoria del Potencial II
Desarrollo Multipolar

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Aplicaciones a la Física Matemática

Teoría del Potencial II: Desarrollo Multipolar

- El Laplaciano en Coordenadas Esféricas
- Armónicos Esféricos
- Aplicación a la Teoría del Potencial Gravitatorio
- Desarrollo Multipolar del Potencial Gravitatorio

El Laplaciano en Coordenadas Esféricas

El Laplaciano de un campo escalar definido en \mathcal{R}^3 , $\Phi(x, y, z)$, es

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Si cambiamos las coordenadas a esféricas

$$x = r \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$y = r \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\varphi)$$

El Laplaciano toma la forma:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi \right] + \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \Phi \right]$$

Método de Separación de Variables

Si la función $\Phi(r, \theta, \varphi)$ es separable en la forma

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$$

El Laplaciano toma la forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= Y(\theta, \varphi) \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \\ &+ R(r) \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{R(r) Y(\theta, \varphi)} \nabla^2 \Phi &= \frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \\ + \frac{1}{Y(\theta, \varphi)} &\left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

La ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas

La **ecuación de Laplace** es $\nabla^2\Phi = 0$

Considerando que las variables son separables en el sentido presentado, tenemos que la ecuación de Laplace en esféricas la podemos escribir

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

o bien

$$\underbrace{-\frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right]}_{\text{sólo depende de } r} = \underbrace{\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right]}_{\text{sólo depende de } \theta \text{ y } \varphi}$$

Para que esto ocurra, se debe cumplir

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{R} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] &= -C \\ \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right] &= C \end{aligned}$$

La Ecuación Radial

La parte radial de la ecuación es

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + C R = 0 \quad (\text{Ecuación de Euler!!!!})$$

Proponiendo una serie de potencias de $R = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell}$ llegamos a

$$\sum a_{\ell} [\ell(\ell - 1) + 2\ell + C] r^{\ell-2} = 0$$

Entonces, C es

$$C = -\ell(\ell + 1)$$

Entonces, la solución general será

$$\phi = A \frac{1}{r^{\ell+1}} Y + B r^{\ell} Y$$

Con este valor de C vamos a la ecuación para $Y(\theta, \varphi)$

La ecuación en θ y φ

Para la función $Y(\theta, \varphi)$ la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \ell(\ell + 1) Y(\theta, \varphi) = 0$$

Si efectuamos el cambio de coordenadas $\xi = \cos(\varphi)$ tendremos que las derivadas las podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} &= -\sin(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} &= -\cos(\varphi) \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

La ecuación en θ y φ (continuación)

Reemplazando en la ecuación para los ángulos tenemos

$$\underbrace{(1 - \xi^2) \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \ell(\ell + 1) Y}_{\text{Ecuación de Legendre!}} + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} = 0$$

Si proponemos $Y = Y_1(\xi) e^{im\theta}$ con $m \in \mathcal{Z}$ y reemplazamos en la ecuación, tenemos

$$\left\{ (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] Y_1 \right\} e^{im\theta} = 0$$

que es satisfecha por la función solución de

$$(1 - \xi^2) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] Y_1 = 0$$

que es la Ecuación Asociada de Legendre

Propiedades de las Funciones asociadas de Legendre

Las funciones P_ℓ^m satisfacen la ecuación diferencial

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P_\ell^m(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP_\ell^m(\xi)}{d\xi} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] P_\ell^m(\xi) = 0$$

1. Ortogonalidad. En $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(t) P_{\ell'}^m(t) dt = \begin{cases} 0 & \ell \neq \ell' \\ \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} & \ell = \ell' \end{cases}$$

2. Fórmula de Rodrigues. Los $P_\ell^m(\xi)$ se pueden calcular a partir de

$$P_\ell^m(\xi) = (-1)^m (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\xi^m} [P_\ell(\xi)] = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{d\xi^{\ell+m}} (\xi^2 - 1)^\ell$$

Propiedades de las Funciones asociadas de Legendre (Continuación)

Las condiciones de periodicidad y regularidad en el polo norte y sur de la esfera hacen que el índice ℓ y el orden m necesarios para que se satisfagan deben ser y cumplir: $\ell \geq 0$ y $|m| \leq \ell$, es decir $-\ell \leq m \leq \ell$.

Consideremos los m positivos:

$$P_{\ell}^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\xi^m} [P_{\ell}(\xi)]$$

Para tomar en cuenta los negativos, tendremos

$$P_{\ell}^{-m}(\xi) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_{\ell}^m(\xi) \quad m > 0$$

La parte angular de la solución de la ecuación de Laplace tendrá como expresión

$$P_\ell^m(\xi)e^{im\theta}$$

Si definimos sobre la superficie de una esfera unidad el producto interno

$$\langle f|g \rangle = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} f(\theta, \varphi) g^*(\theta, \varphi) \underbrace{\sin(\varphi) d\varphi d\theta}_{\text{ángulo sólido } d^2\Omega}$$

junto con la relación de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre, tendremos

$$\langle P_\ell^m(\xi)e^{im\theta} | P_{\ell'}^{m'}(\xi)e^{im'\theta} \rangle = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Definición de Armónicos Esféricos

Con todo lo visto, se define los **Armónicos Esféricos**, $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}} P_{\ell}^{|m|}(\cos \varphi) e^{im\theta} \times \begin{cases} (-1)^m & m \geq 0 \\ 1 & m < 0 \end{cases}$$

Entonces, la solución general a la ecuación $\nabla^2 \Phi = 0$ será, por el principio de superposición

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[A^{\ell m} \frac{1}{r^{\ell+1}} + B^{\ell m} r^{\ell} \right] Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Tabla para los Primeros de Armónicos Esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

A partir de la definición tenemos

$$\begin{aligned} \ell = 0 : Y_{00} &= \frac{1}{4\pi} \\ \ell = 1 : \begin{cases} Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\varphi) e^{-i\theta} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\varphi) \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\varphi) e^{i\theta} \end{cases} \\ \ell = 2 : \begin{cases} Y_{2,-2} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin^2(\varphi) e^{-2i\theta} \\ Y_{2,-1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{-i\theta} \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left[\frac{3}{2} \cos^2(\varphi) - \frac{1}{2} \right] \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{i\theta} \\ Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\varphi) e^{2i\theta} \end{cases} \end{aligned}$$

Y así sucesivamente

Teorema de Adición de Armónicos Esféricos

Un resultado de gran aplicación en Teoría del Potencial es el denominado **Teorema de Adición de Armónicos Esféricos**. Si dos radios vectores forman entre sí un ángulo γ ($\cos(\gamma) = \frac{\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle}{|\vec{r}| |\vec{r}'|}$) se tiene

$$P_\ell(\cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')$$

donde

$$\cos(\gamma) = \cos(\varphi) \cos(\varphi') + \sin(\varphi) \sin(\varphi') \cos(\theta - \theta')$$

Recordemos además que los polinomios de Legendre pueden ser obtenidos a partir de la **función generatriz**

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell$$

La función de Green para la Esfera

Consideremos la función

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\gamma)}}$$

con $r = |\vec{r}|$, $r' = |\vec{r}'|$

Supongamos que separamos el problema en **interior** ($r < r'$) y **exterior** ($r > r'$)

Para hacer el desarrollo en polinomios de Legendre es necesario distinguir los problemas, ya que el cociente r/r' o r'/r debe ser menor a uno para que sea convergente.

Entonces, para $r > r'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\gamma)}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + t^2 - 2t \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r^{\ell+1}} r'^{\ell} \end{aligned}$$

La función de Green para la Esfera (*continuación*)

y para $r < r'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\gamma)}} \\ &= \frac{1}{r' \sqrt{1 + t^2 - 2t \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r'^{\ell+1}} r^{\ell} \end{aligned}$$

Sólo resta aplicar ahora el **Teorema de Adición de Armónicos Esféricos** y completamos la descripción en coordenadas esféricas

Teorema de Adición de Armónicos Esféricos

Aplicando el teorema de Adición, tenemos

- Para $r' < r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r^{\ell+1}} r'^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell + 1} \frac{1}{r^{\ell+1}} r'^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')\end{aligned}$$

- Para $r' > r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos(\gamma)) \frac{1}{r'^{\ell+1}} r^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell + 1} \frac{1}{r'^{\ell+1}} r^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi')\end{aligned}$$

Desarrollo Multipolar del Potencial Gravitatorio. Alcance Infinito

Apliquemos el Teorema de Adición de Armónicos Esféricos al *Problema Gravitatorio* de alcance infinito (entonces con la imposición de que debe ser nulo el potencial en el infinito y el campo ($\nabla\Phi = 0$) en el infinito, la segunda identidad de Green se reduce a

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Ahora, la integral se calcula en todo \mathcal{R}^3

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int_0^\infty \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \rho(\vec{r}') \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} r'^2 \sin(\varphi) dr' d\theta' d\varphi'$$

La integral en r' la separamos en $0 \leq r' < r$ y en $r \leq r' < \infty$

Expresión del Desarrollo Multipolar

Realizando la separación de la integral en r' y considerando el teorema de adición de armónicos esféricos (tendiendo en cuenta los valores relativos de r y r') llegamos a la expresión del desarrollo multipolar

$$\Phi(\vec{r}) = -4\pi G \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{2\ell+1} \left\{ \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_0^r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}') r'^{\ell+2} \underbrace{\sin(\varphi') d\varphi d\theta}_{d^2\Omega \text{ (ángulo sólido)}} \right. \\ \left. + r^{\ell} \int_r^{\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}') r'^{-\ell+1} \underbrace{\sin(\varphi') d\varphi d\theta}_{d^2\Omega \text{ (ángulo sólido)}} \right\}$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kellog, Oliver D. *Foundations of Potential Theory*. Ed. Dover (1953)
- Webster, Arthur G. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Dover (1955)
- Jackson, John D. *Electrodinámica Clásica*. Ed. Alhambra. (1966)
- Sobolev, Sergei. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Addison Wesley (1964)