Matemáticas Especiales II
Clase 24
Teoría del Potencial I

Identidades de Green y Problemas de Contorno

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Aplicaciones a la Física Matemática
Teoria del Potencial

- Problema de Contorno en el Espacio
- Identidades de Green
- Condición de Dirichlet
- Condición de Neumann

Problema de Contorno en el Espacio

1. El problema de Sturm-Liouville puede ser extendido a problemas de contorno en el plano y en el espacio.

2. Las ideas y propiedades relacionadas a la función de Green pueden ser extendidas a $\mathcal{R}^2$ y $\mathcal{R}^3$

3. Análogamente a los visto para un problema unidimensional, la solución de un problema inhomogéneo será construída a partir de la función de Green.

4. En un problema espacial, vamos a considerar una superficie cerrada $S = \partial V$ frontera de un volumen V

5. Con este análisis, haremos un estudio del potencial gravitatorio para el caso espacial, teniendo en cuenta volumen acotado y el problema infinito.

Condiciones de Contorno. Las Identidades de Green

Para tratar las condiciones de contorno en el problema del potencial, vamos a considerar un procedimiento desarrollado por **George Green**. Este procedimiento consiste en aplicar el conocido Teorema de Gauss

$$\iiint_V Div(\vec{F})\, dv = \iint_{\partial V} \langle \vec{F} | \vec{n} \rangle \, dS$$

donde ∂V es la superficie frontera del volumen V y $\vec{n}$ el vector normal exterior.

Si elegimos dos campos escalares Φ y Ψ de tal manera que definimos el campo $\vec{F}$ a partir de la relación $\vec{F} = \Phi\, \nabla \Psi$ tenemos que

$$Div(\Phi\, \nabla \Psi) = \Phi \nabla^2 \Psi + \langle \nabla \Phi | \nabla \Psi \rangle$$

Reemplazando en la integral, tenemos la primera identidad de Green

$$\iiint_V \left[\Phi \nabla^2 \Psi + \langle \nabla \Phi | \nabla \Psi \rangle \right] \, dv = \iint_{\partial V} \Phi \, \langle \nabla \Psi | \vec{n} \rangle \, dS = \iint_{\partial V} \Phi \, \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} \, dS$$

Las Identidades de Green (*Continuación*)

Si a partir de la primera identidad de Green

$$\iiint_V \left[\Phi \nabla^2 \Psi + \langle \nabla \Phi | \nabla \Psi \rangle \right] dv = \iint_{\partial V} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} dS$$

Intercambiamos Φ con Ψ y restamos obtenemos la segunda identidad de Green

$$\iiint_V \left[\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi \right] dv = \iint_{\partial V} \left[\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right] dS$$

Para aplicar las identidades de Green al problema del potencial, tengamos en cuenta que

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r'})$$

Esta identidad se obtiene directamente a partir de aplicar el Teorema de Gauss

$$\iiint_V \nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] dv = \iiint_V Div \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] dv = \iint_{\partial V} \langle \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} | \vec{n} \rangle \, ds = \iint_{\partial V} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] r^2 ds = -4\pi$$

Aplicación de las Identidades de Green. Ecuación de Poisson.

Si aplicamos la segunda identidad de Green en la que para la función Φ sea el potencial gravitatorio y la función

$$\Psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Además, si consideramos que el potencial gravitatorio debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Tenemos

$$\iiint_V \left[\Phi(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'})) - \frac{4\pi G}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\rho(\vec{r'}) \right] dv' = \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n'}} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

Entonces, calculando la primera integral

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n'}} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

A partir de la propiedad

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'})$$

vemos que esta función cumple con la condición fundamental para ser función de Green. Más aún, si consideramos una función armónica adicional, también satisface la ecuación, con lo que podemos construir una función de Green de la forma

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} + F(\vec{r}, \vec{r'}) \qquad (\nabla^2 F = 0)$$

Entonces, sustituyendo en la fórmula de Green para la función $\Phi(\vec{r})$
Entonces, calculando la primera integral

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G(\vec{r}, \vec{r'}) dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial \vec{n'}} - G(\vec{r}, \vec{r'}) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

Condición de Dirichlet

De la expresión

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G(\vec{r}, \vec{r'}) dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial \vec{n'}} - G(\vec{r}, \vec{r'}) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

si imponemos la condición de Dirichlet

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = 0 \qquad \vec{r'} \in S$$

la solución será

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G_D(\vec{r}, \vec{r'}) dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \Phi \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial \vec{n'}} dS$$

Condición de Neumann

Para la imposición de la condición de Neumann, debemos tener cuidado porque poner sencillamente $\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r'})}{\partial \vec{n'}} = 0$ nos podría traer confusión, ya que por aplicación directa del Teorema de Gauss

$$\iint_{\partial V} \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r'})}{\partial \vec{n'}} \, dS = -4\pi$$

Por lo tanto, la condición más sencilla que podemos imponer para el problema de Neumann es

$$\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r'})}{\partial \vec{n'}} = -\frac{4\pi}{S} \qquad (\vec{r'} \in S)$$

donde S es el valor del área de la superficie S
Con esto, la solución a la Ecuación de Poisson con la condición de Neumann para Φ será, llamando $\langle \Phi \rangle_S$ al valor medio del potencial sobre la superficie

$$\Phi(\vec{r}) = \langle \Phi \rangle_S - G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G(\vec{r},\vec{r'}) dv' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} G_N(\vec{r},\vec{r'}) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \, dS$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kellog, Oliver D. *Foundations of Potential Theory*. Ed. Dover (1953)
- Webster, Arthur G. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Dover (1955)
- Jackson, John D. *Electrodinámica Clásica*. Ed. Alhambra. (1966)
- Sobolev, Sergei. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Addison Wesley (1964)