Matemáticas Especiales II
Clase 23
Ecuaciones Diferenciales Parciales

Lineales de 2do. Orden.

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Ecuaciones Difereciales Parciales Lineales de 2do. Orden.

- Definiciones. Clasificación
- Ecuaciones Elípticas
- Ecuaciones Parabólicas
- Ecuaciones Hipérbolicas
- Método de Separación de Variables
- Sistemas de Coordenadas en función de las regiones

Definición. Se llama ecuación diferencial (EDP) de segundo orden de 2 variables independientes (x, y) a una relación entre la función incógnita $u(x, y)$ y sus derivadas parciales hasta el segundo orden, esto es

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\right) = 0$$

Además, se llama lineal si con respecto a cada derivada lo es.

En este curso nos dedicaremos a una descripción cualitativa de este tipo de ecuaciones, y algunos métodos elementales de resolución.

Clasificación

La expresión general de una EDP lineal de segundo orden

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + c\,u + f = 0$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c y f son funciones sólo de x, y.

Además,

- Si las funciones a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c son constantes, se dice que la EDP es de *coeficientes constantes*
- Si $f = 0$ la EDP se dice *homogénea*

Formas Canónicas

Es natural preguntarse si a partir de un determinado cambio de coordenadas es posible simplificar la ecuación diferencial, esto es, a partir de un cambio de la forma

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

donde las funciones tienen inversa.
A partir de cómo es la forma final (y simplificada) que adopta la EDP se da la clasificación.

Clasificación

Dada la expresión

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + c\,u + f = 0$$

tendremos la siguiente clasificación

- **Hiperbólica.** Será denominada de *tipo hiperbólico* si se satisface

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$$

- **Elíptica.** Será denominada de *tipo elíptico* si se satisface

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$$

- **Parabólica.** Será denominada de *tipo parabólico* si se satisface

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

Ecuaciones de la Física Matemática

Los casos paradigmáticos de EDP de 2do. orden con coeficientes constantes son, a saber

- **Hiperbólica. Ecuación de Onda**

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$$

- **Elíptica. Ecuación del Potencial**

$$\nabla^2 u = f$$

- **Parabólica. Ecuación del Calor**

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t} = f$$

Método de Separación de Variables

El método de separación de variables consiste en proponer como solución de una EDP, una función compuesta por producto de funciones cada una de ellas de una variable.

Para el caso de una EDP en coordenadas cartesianas, tendremos

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Entonces, calcular el Laplaciano, resulta:

$$\nabla^2 u = X''(x) \cdot Y(y) + X(x) Y''(y)$$

Con lo cual, la ecuación $\nabla^2 u = 0$, se transforma en

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) Y''(y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

como término es función de una sola variable, no hay otra opción que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \ (o\ \mathbb{C})$$

De

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C})$$

la elección de λ será a partir de las condiciones de contorno.

Este método puede no conducir a la solución, sin embargo puede proponerse para cualquiera de los tres tipos de EDP presentados: Ec. de la Onda, del Calor o del Potencial.

Como veremos más adelante, dependiendo de la geometría del problema, esto es, los recintos y condiciones sobre los contornos, es que deberemos trabajar con las coordenadas que den cuenta de la simetría.

Cambios de Coordenadas. El Laplaciano

- Planteo Geométrico: El tensor métrico
- El elemento de arco
- Expresión para el Laplaciano
- Coordenadas Polares
- Coordenadas Cilíndricas
- Coordenadas Esféricas

El elemento de arco ds^2

El $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ el elemento de arco se define inicialmente a partir de un sistema de coordenadas cartesianas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Para el caso de $\mathbb{R}^3$, al efectuar un cambio de coordenadas (no necesariamente lineal)

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x, y, z) \quad \alpha = 1, 2, 3$$

debemos obtener el elemento de arco invirtiendo y calculando el $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ahora en las nuevas coordenadas

El tensor métrico

El elemento de arco ds^2

Realizado el cambio de coordenadas y calculando el ds^2 se obtiene, en las nuevas coordenadas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} g_{\mu\nu} dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx'^{\mu}\, dx'^{\nu}$$

donde las cantidades $g_{\mu\nu}$ son las coordenadas del *tensor métrico* en este sistema de coordenadas

Ejemplo 1: Coordenadas Polares

En coordenadas polares,

$$x = \rho \cos(\theta), \qquad y = \rho \sin(\theta)$$

entonces,

$$dx = \cos(\theta)\, d\rho - \rho \sin(\theta) d\theta, \qquad dy = \sin(\theta)\, d\rho + \rho \cos(\theta) d\theta$$

Calculando el elemento de arco,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2$$

Con lo que las coordenadas del tensor métrico serán

$$g_{\rho\rho} = 1, \;\; g_{\rho\theta} = g_{\theta\rho} = 0, \;\; g_{\theta\theta} = \rho^2$$

$$[\mathbf{g}]_{polares} = \begin{bmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\theta} \\ g_{\theta\rho} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas,

$$x = \rho\cos(\theta), \qquad y = \rho\sin(\theta) \qquad z = z$$

entonces,

$$dx = \cos(\theta)\,d\rho - \rho\sin(\theta)d\theta, \qquad dy = \sin(\theta)\,d\rho + \rho\cos(\theta)d\theta, \qquad dz = dz$$

Calculando el elemento de arco,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + dz^2$$

$$[\mathbf{g}]_{cilindricas} = \begin{bmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\theta} & g_{\rho z} \\ g_{\theta\rho} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{z\rho} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Coordenadas Esféricas

En coordenadas esféricas, el cambio de coordenadas es,

$$x = r\,\cos(\varphi)\sin(\theta), \qquad y = r\,\sin(\varphi)\sin(\theta) \qquad z = r\cos(\theta)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
dx &= \cos(\varphi)\sin(\theta)dr - r\,\sin(\varphi)\sin(\theta)d\varphi + r\,\cos(\varphi)\cos(\theta)d\theta \\
dy &= \sin(\varphi)\sin(\theta)dr + r\,\cos(\varphi)\sin(\theta)d\varphi + r\,\sin(\varphi)\cos(\theta)d\theta \\
dz &= \cos(\theta)dr - r\,\sin(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Reemplazando en el elemento de arco, obtenemos,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,\sin^2(\theta)\,d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

$$[\mathbf{g}]_{esfericas} = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} & g_{r\theta} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Cálculo invariante del Laplaciano

Laplaciano a partir del Análisis Tensorial

El Laplaciano en coordenadas esféricas y cilíndricas es intrincado para obtenerlo a partir de la simple sustitución de coordenadas y cálculo de derivadas segundas. Sin embargo, mediante técnicas del análisis tensorial, la expresión es mucho más sencilla

Técnica:

- Dado el cambio de coordenadas, tenemos las coordenadas del tensor métrico, $g_{\mu\nu}$
- Obtenemos, de manera matricial, el inverso, que llamamos $g^{\alpha\beta}$
- Llamemos g al determinante de $g_{\mu\nu}$

Con estas definiciones, calculamos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right]$$

El Laplaciano en Coordenadas Polares

En coordenadas polares

En polares, $g = \rho^2$, el

$$\left[\mathbf{g}^{-1}\right]_{polares} = \begin{bmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\theta} \\ g^{\theta\rho} & g^{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\rho\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{\rho^2} g^{\theta\theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

El Laplaciano en Coordenadas Cilíndricas

En coordenadas cilíndricas

En cilíndricas, $g = \rho^2$, el

$$\left[\mathbf{g}^{-1}\right]_{cilindricas} = \begin{bmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\theta} & g^{\rho z} \\ g^{\theta\rho} & g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{z\rho} & g^{z\theta} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\sqrt{\rho^2}g^{\rho\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sqrt{\rho^2}g^{\theta\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{\rho^2}g^{zz}\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

En coordenadas esféricas

En esféricas, $g = r^4 \sin^2(\theta)$, el

$$\left[\mathbf{g}^{-1}\right]_{esf\acute{e}ricas} = \begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\varphi} & g^{r\theta} \\ g^{\varphi r} & g^{\varphi\varphi} & g^{\varphi\theta} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\varphi} & g^{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{\sqrt{r^4\sin^2(\theta)}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sqrt{r^4\sin^2(\theta)}g^{rr}\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{\sqrt{r^4\sin^2(\theta)}}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\sqrt{r^4\sin^2(\theta)}g^{\varphi\varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{r^4\sin^2(\theta)}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sqrt{r^4\sin^2(\theta)}g^{\theta\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right] \end{aligned}$$

Reemplazando, tenemos

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right] + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Tijonov, A.; Samarsky: *Ecuaciones de la Física Matemática*, Ed. MIR (1980)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Mathews, J.; Walker, R. L. *Mathematical Methods of Physics*, Ed. Addison-Wesley (1970)
- Webster, A. G. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Ed. Dover (1933)
- Kellog, O. D. *Foundations of Potential Theory*, Ed. Dover (1953)