Matemáticas Especiales II
Clase 22
El Problema de Sturm-Liouville II

Autofunciones y Función de Green

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

El Problema de Sturm-Liouville Desarrollo en Autofunciones

- Propiedades del Operador de Sturm-Liouville
- Teorema de Sturm-Liouville
- Ejemplos de ecuaciones de Sturm-Liouville
- El problema no homogéneo: Función de Green
- Construcción de la Función de Green
- Desarrollo de la Función de Green en autofunciones

Como el operador de Sturm-Liouville es Hermítico, tenemos que (repasar Algebra Lineal)

- Los autovalores son reales
- Autofunciones asociadas a distintos autovalores son ortogonales

Desarrollos en Funciones Ortogonales

Como consecuencia de las propiedades en tanto operador Hermítico, cualquier función definida en el intervalo de la ecuación diferencial admitirá un desarrollo análogo al obtenido para el caso de las series de Fourier, en autofunciones del operador

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

Propiedad Espectral del Operador de Sturm-Liouville. Teorema de Sturm-Liouville

Definición.(*Problema Coercivo*). *Un problema de Sturm-Liouville se dice coercivo si existe un $\alpha_0 \in \mathcal{R}$ tal que*

$$\langle L[y]|y\rangle \geq \alpha_0 \left(||y|| + ||y'||\right)^2$$

Asimismo, el problema se llama casi-coercivo si existe un $\mu \in \mathcal{R}$ tal que el operador $L - \mu\, r(x)$ es coercivo

Teorema.(*Sturm-Liouville*). *Dado un problema de Sturm-Liouville regular y casi-coercivo, se tiene:*

- *El conjunto de autovalores es numerable y ordenado*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\right)$$

- *El conjunto de autofunciones es completo, es decir es base.*
- *Cada autofunción asociada a λ_k posee $k-1$ ceros en el intevalo de definición del problema*

Veamos algunos ejemplos de problemas de Sturm-Liouville

1. Ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell(x)\right]+\ell(\ell+1)P_\ell(x)=0$$

2. Ecuación de Bessel

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2 x^2-\nu^2)y=0$$

Puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda^2 x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0$$

El problema no homogeneo. La función de Green

Consideremos el problema no homogeneo definido en el intervalo $[a, b]$

$$L[y] = f(x)$$

Para resolver este problema se define la **Función de Green, $G(x, x')$** a través de la relación

$$L[G(x, x')] = \delta(x - x')$$

la cual satisface las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann o la más general de las condiciones, la de Robin

$$c_a\, G(a, x') + d_a\, \frac{\partial G}{\partial x}(a, x') = 0$$
$$c_b\, G(b, x') + d_b\, \frac{\partial G}{\partial x}(b, x') = 0$$

La Solución del Problema Inhomogéneo

Teorema.
i) La solución del problema inhomogéneo existe si y sólo si la única solución del problema homogéneo con las condiciones de contorno de Robin es la solución trivial.
ii) El en caso del inciso i), la solución del problema inhomogéneo viene dada por

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')\, f(x')\, dx'$$

apliquemosle el operador

$$L[y] = \int_a^b \underbrace{L[G(x,x')]}_{\text{L actúa en la variable x}} f(x')\, dx' = \int_a^b \delta(x-x')\, f(x')\, dx' = f(x)$$

solución de la ecuación! . Además, satisface las condiciones de contorno (ya que $G(x,x')$ las satisface

Construcción de la Función de Green

1. Existen funciones y_1 e y_2 que satisfacen

$$c_a\, y_1(a) + d_a\, y_1'(a) = 0$$
$$c_b\, y_2(b) + d_b\, y_2'(b) = 0$$

Esto se cumple, debido al teorema de existencia y unicididad, existen funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, linealmente independientes definidas a través del problema de Cauchy $L[u_1] = 0$ con valores u_1 y u_1' en a y u_2 y u_2' en b

2. Podemos definir $G(x, x')$

$$G(x, x') = \begin{cases} c_1(x')\, y_1(x) & a \leq x < x' \\ c_2(x')\, y_2(x) & x' < x \leq b \end{cases}$$

Esta función satisface $L[G(x, x')] = 0$ (para menores y mayores estrictos de x') y satisface las condiciones de contorno.

Construcción de la Función de Green. *Continuación*

Además, como queremos que sea efectivamente la función de Green, debe satisfacer

$$L[G(x,x')] = \delta(x-x')$$

Entonces, integrando entre a y b con respecto a x tenemos

$$\int_a^b L[G(x,x')]\,dx = \int_a^b \delta(x-x')\,dx = 1$$

$\left(\int_a^b \delta(x-x')\,dx' = \int_a^b \delta(x-x')\,dx = 1\right)$ Separando la integral de la forma $\int_a^b = \int_a^{x'-\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \int_{x'+\varepsilon}^b$ y dado que la función de Green satisface $L[G(x,x')] = 0$ para x mayor estricto o menor estricto a x' solo debemos calcular la integral

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} L[G(x,x')]\,dx = 1$$

Construcción de la Función de Green. *Continuación*

Aplicando el operador L a $G(x,x')$ e integrando, tenemos

$$-\left[p(x)\frac{G(x,x')}{dx}(x,x')\right]_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}+\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x)\,G(x,x')\,dx=1$$

1. Debido a la continuidad de $q(x)$ y si imponemos la continuidad de $G(x,x')$ en $x=x'$ la integral se anula para $\varepsilon\to 0$

2. Para que el resultado de 1 debemos imponer una discontinuidad en la derivada de G en $x=x'$ cuyo salto sea $-1/p(x')$ es decir, la diferencia de las derivadas laterales sea $-1/p(x')$ (esto implica que la derivada sea la función de Heaviside, más un término continuo)
Entonces, por cómo propusimos la función de Green, $c_1(x')$ y $c_2(x')$ se obtienen a partir de

$$c_2(x')\,y_2(x')-c_1(x')\,y_1(x')=0 \quad (\text{continuidad en } x=x')$$

$$c_2(x')\,y_2'(x')-c_1(x')\,y_1'(x')=-\frac{1}{p(x')} \quad (\text{discontinuidad en } x=x')$$

La expresión de la Función de Green

Con las condiciones impuestas, la expresión de la función de Green será

$$G(x,x') = \begin{cases} -\frac{y_1(x)\,y_2(x')}{p(x')\,W(x')} & a \le x < x' \\ \\ -\frac{y_2(x)\,y_1(x')}{p(x')\,W(x')} & x' \le x \le b \end{cases}$$

donde

$$W(x') = y_1(x')\,y_2'(x) - y_1'(x')\,y_2(x)$$

Ejemplo. Obtener la función de Green para el problema

$$y'' + \omega^2\,y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Desarrollo de la Función de Green en autofunciones

Sea $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ una base del espacio de funciones cuadrado integrables en $[a, b]$. Para una función $\phi(x)$, tendremos

$$\phi(x) = \sum_{\ell} \frac{\langle \psi_\ell | \phi \rangle}{||\psi_\ell||^2} \, \psi_\ell(x)$$

Además,

$$\frac{\langle \psi_\ell | \phi \rangle}{||\psi_\ell||^2} = \frac{1}{||\psi_\ell||^2} \int_a^b \phi(x')\psi_\ell(x')\, dx'$$

Reemplazando en la expresión para ϕ y agrupando convenientemente,

$$\phi(x) = \int_a^b \left[\sum_{\ell} \frac{\psi_\ell(x)\psi_\ell(x')}{||\psi_\ell||^2} \right] \phi(x')\, dx'$$

Entonces, por identificación con la función delta de Dirac, tenemos:

$$\sum_{\ell} \frac{\psi_\ell(x)\psi_\ell(x')}{||\psi_\ell||^2} = \delta(x' - x)$$

La Función de Green

Si proponemos que la función de Green tenga la forma

$$G(x,x') = \sum_{\ell} a(x')\,\psi_\ell(x)$$

Aplicando el operador de Sturm-Liouville asociado (que da origen a la base de autovectores ψ_ℓ, tendremos

$$L_x\left[G(x,x')\right] = \sum_{\ell} a(x')\,L\left[\psi_\ell(x)\right], \quad \rightarrow \quad \delta(x'-x) = \sum_{\ell} a(x')\,\lambda_\ell\,\psi_\ell(x)$$

y, como

$$\sum_{\ell} \frac{\psi_\ell(x)\psi_\ell(x')}{||\psi_\ell||^2} = \delta(x'-x)$$

podemos despejar las funciones $a(x')$, resultando,

$$G(x,x') = \sum_{\ell} \frac{1}{\lambda_\ell||\psi_\ell||^2}\,\psi_\ell(x)\,\psi_\ell(x')$$

Ejemplo. Hallar la función de Green por construcción y en desarrollo de autofunciones para el problema:

$$L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} = x, \qquad y(0) = y(L) = 0$$

Por construcción, tenemos que la función de Green es

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{(x'-L)\,x}{L} & 0 \leq x \leq x' \\ \frac{x'\,(x-L)}{L} & x' \leq x \leq L \end{cases}$$

Recordemos que debemos obtener las soluciones de la homogénea, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tales que

$$y_1(0) = 0, \qquad y_2(L) = 0$$

La solución del problema, será

$$y(x) = \int_0^L G(x',x)\,x'\,dx' = \int_0^x \frac{(x-L)\,x'}{L} x'\,dx' + \int_x^L \frac{(x'-L)\,x}{L} x'\,dx' = \frac{1}{6}x(x^2-L^2)$$

Ejemplo. *Continuación*

Ahora consideremos las autofunciones del operador $L = \frac{d^2}{dx^2}$, esto es

$$\psi'' = \lambda\,\psi, \qquad \psi(x) = A\,e^{\sqrt{\lambda}x} + B\,e^{-\sqrt{\lambda}x}, \qquad y(0) = y(L) = 0$$

Entonces, λ debe ser un número negativo, sino debería ser el nulo. Así que llamando $\lambda = -\omega^2$, $\omega \in \mathcal{R}$ Además, por las condiciones de borde tenemos que

$$\psi_n(L) = 0, \qquad \rightarrow \qquad \psi(x) = \sin\left[\frac{n\pi}{L}x\right]$$

Con esto, la función de Green será:

$$G(x, x') = \sum_n \frac{-2L}{n^2\pi^2} \sin\left[\frac{n\pi}{L}x\right] \sin\left[\frac{n\pi}{L}x'\right], \qquad (\lambda_n = -\frac{n^2\,\pi^2}{L^2})$$

y la solución del problema original será

$$y(x) = \int_0^L G(x', x)\,x'\,dx'$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Bravo Yuste, Santos: *Métodos Matemáticos Avanzados para Científicos e Ingenieros*, Ed. Universidad de Extremadura (2006)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Albo Carlos Cavalheiro, *O Problema de Sturm-Liouville* Minicurso II Colóquio de Matemática da Região Sul. Universidade Estadual de Londrina, Brasil (`http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-2.01.pdf`)