Matemáticas Especiales II
Clase 21
El Problema de Sturm-Liouville I

Definiciones y Ejemplos

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

El Problema de Sturm-Liouville
El Caso Homogéneo

- Formulación del problema
- Tipos de Condiciones de Contorno
- Carácter Autoadjunto del Operador de Sturm-Liouville

El abordaje de las ecuaciones diferenciales que hasta ahora hemos analizado fue en el sentido de **Problema de Valor Inicial** o **Problema de Cauchy**

En virtud de la teoría desarrollada, para una ecuación lineal de segundo orden eran necesarios los valores de la función y de la derivada en un valor inicial.

El **Problema de Sturm-Liouville** será una ecuación diferencial de segundo orden definida en un intervalo cerrado (y que pueda ser escrita en determinada manera), para la cual las condiciones se fijan los valores en los extremos del intervalo, tanto el valor de la función como el de la derivada.

Formulación

Una ecuación diferencial de segundo orden

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = \lambda\, y(x)$$

definida en un intervalo $[a, b]$ se dice que es de Sturm-Liouville si puede escribirse como

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] y(x) + q(x)y(x) = \lambda\, r(x)\, y(x)$$

donde las funciones $p(x)$ y $r(x)$ son positivas en el intervalo

Tipos de Condiciones de Contorno

En general, las condiciones de contorno para el problema de Sturm-Liouville pueden ser de dos tipo:

- Condiciones Locales o Separadas: Son aquellas que fijan valores de la función y de la derivada en cada extremo del intervalo
- Condiciones No Locales: Son aquellas que relacionan los valores de la función y de la derivada en cada extremo del intervalo

Tipos de Condiciones Locales o Separadas

Los tipos de Condiciones Locales:

- Dirichlet:

$$\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

- Newmann:

$$\begin{cases} y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Nicoletti:

$$\begin{cases} y'(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases} \qquad o \qquad \begin{cases} y(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

Carácter Autoadjunto del Operador de Sturm-Liouville

Definimos como **Operador de Sturm-Liouville** al operador lineal:

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

Con esta definición, la ecuación diferencial que queremos resolver se puede escribir

$$L[y] = \lambda r(x)\, y$$

Que es (casi) un problema de autovalores (casi por el factor $r(x)$
Para el producto interno en $[a, b]$

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

para las condiciones de contorno que hemos definido el **operador** es **Hermítico** o **autoadjunto**

El Operador es Autoadjunto

Calculemos

$$\langle L[f]|g\rangle = \int_a^b L[f(t)]\, g(t)\, dt = \int_a^b \left[-\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{df(t)}{dt}\right] + q(t)\, f(t)\right]\; g(t)\, dt$$

Calculemos mediante integración por partes la integral

$$-\int_a^b \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{df(t)}{dt}\right]\; g(t)\, dt = -\; p(t)\frac{df(t)}{dt}\, g(t)\Big|_a^b + \int_a^b p(t)\frac{df(t)}{dt}\;\frac{dg(t)}{dt}\; dt$$

Ahora calculemos por partes la integral

$$\int_a^b p(t)\frac{df(t)}{dt}\;\frac{dg(t)}{dt}\; dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\left[p(t)\;\frac{dg(t)}{dt}\right]\;\frac{df(t)}{dt}\; dt + \; p(t)\frac{dg(t)}{dt}\; f(t)\Big|_a^b$$

Volviendo entonces a escribir $\langle L[f]|g\rangle$

$$\langle L[f]|g\rangle = \langle f|L[g]\rangle + p(a)\left[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right] + p(b)\left[f'(b)g(b) - f(b)g'(b)\right]$$

Tanto para condiciones de Dirichlet o Neumann tenemos

$$\langle L[f]|g\rangle = \langle f|L[g]\rangle$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Bravo Yuste, Santos: *Métodos Matemáticos Avanzados para Científicos e Ingenieros*, Ed. Universidad de Extremadura (2006)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)