

Matemáticas Especiales II
Clase 20
Transformada de Fourier II

Transformada Seno y Coseno. Aplicaciones

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Transformada de Fourier

Propiedades y aplicaciones

- Integral de Fourier con Senos y Cosenos
- Funciones Pares e Impares
- Transformada Coseno y Transformada Seno
- Ejemplo y Aplicación al Cálculo de Integrales Impropias

Otra formulación de la serie de Fourier

Escribamos la serie de Fourier, definida para una función periódica en el intervalo $[-L, L]$

$$f(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

En virtud de la paridad de la función coseno, podemos escribir

$$\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ (\ell \neq 0)}}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right]$$

Entonces, podemos escribir:

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

Otro tipo de *salto al continuo* (continuación)

A partir de

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \cos \left[\frac{\ell\pi}{L}(t-x) \right] \right\} dt$$

consideremos $\omega = \frac{\pi}{L}\ell$, entonces, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$

De manera análoga a lo hecho para la obtención de la integral de Fourier, y teniendo en cuenta la paridad (con respecto a la variable ω del coseno) podemos llegar a la expresión, tomando el límite al continuo

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\omega(t-x)] dt \right\} d\omega$$

o, asumiendo la convergencia de las integrales impropias

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \right\} \cos(\omega x) d\omega \\ &+ \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right\} \sin(\omega x) d\omega \end{aligned}$$

Funciones Pares e Impares. Transformada Coseno y Transformada Seno de Fourier

En general, llegamos a

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \right\} \cos(\omega x) d\omega \\ + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right\} \sin(\omega x) d\omega$$

Si la **función es par**, la parte correspondiente a la integral de seno se anula, por lo que podemos escribir (usando la paridad)

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \right\} \cos(\omega x) d\omega$$

Si la **función es impar**, la parte correspondiente a la integral de coseno se anula,

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right\} \sin(\omega x) d\omega$$

Transformada Coseno y Transformada Seno de Fourier

Si la **función es par**

$$f(x) = \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega$$

donde define la **Transformada Coseno**

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

Si la **función es impar**

$$f(x) = \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

donde define la **Transformada Seno**

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Ejemplo

Hallar la Transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Como la función es par, podemos obtener la transformada coseno, que resulta inmediatamente de calculo directo

$$F_c(\omega) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\pi \omega}$$

Entonces, en virtud de la Integral de Fourier, podemos escribir

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin(a\omega)}{\pi \omega} \cos(\omega x) d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Aplicación al Cálculo de Integrales Impropias

A partir del ejemplo anterior

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin(a\omega)}{\pi \omega} \cos(\omega x) d\omega = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Podemos escribir cambiando adecuadamente las variables

$$\int_0^{\infty} \frac{2 \sin(ax)}{\pi x} \cos(bx) dx = \begin{cases} 1 & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

o bien

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) \cos(bx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |b| \leq a \\ 0 & |b| > a \end{cases}$$

Que nos permite obtener, para $a = 1$ y $b = 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)