Matemáticas Especiales II
Clase 2
Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Coeficientes Constantes

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden Coeficientes Constantes

- Ecuación Homogénea
  - Propuesta de soluciones $e^{\alpha\, t}$. Ecuación Característica
  - Casos: α's reales distintos
  - Casos: α's complejos distintos
  - Casos: α's iguales
- Caso no homogéneo: Variación de los parámetros

Ecuación Homogénea

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

Para darle un marco de sistemas de ec. diferenciales lineales, podemos definir $y(t) = x'(t)$ con lo que tenemos el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} x'(t) &= y \\ y'(t) &= -a\,y - b\,x \end{aligned}$$

En términos matriciales,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo que se vio, existen dos soluciones linealmente independientes

Propuesta de soluciones $e^{\alpha\, t}$

De la reescritura de la ec. de segundo orden como un sistema de primer orden, podemos afirmar:

- Posee dos soluciones linealmente independientes
- El Problema de Valor Inicial necesita $x(t_0)$ e $x'(t_0)$

Para la búsqueda de las soluciones, consideremos como *ansatz*: $x(t) = e^{\alpha\, t}$
Reemplazando en la ec. diferencial

$$\left[\alpha^2 + a\,\alpha + b\right]\, e^{\alpha\, t} = 0 \qquad \text{como } e^{\alpha\, t} \neq 0$$

Tenemos la *ecuación característica*

$$\alpha^2 + a\,\alpha + b = 0 \qquad \text{notemos que es la ec. de autovalores de la matriz } \mathbf{A}$$

tendremos los casos:

- Dos soluciones distintas (reales o complejas), α_1 y α_2
- Raíz doble: una única solución en α

Caso $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Si al resolver la ecuación característica tenemos que las raíces son distintas, hemos resuelto el problema y la solución general será

$$x(t) = c_1\, e^{\alpha_1\, t} + c_2\, e^{\alpha_2\, t} = c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t)$$

Para el caso en que a y b sean **reales**, tendremos que

- α_1 y α_2 son reales. Entonces la solución general es

$$x(t) = c_1\, e^{\alpha_1\, t} + c_2\, e^{\alpha_2\, t}$$

- α_1 y α_2 son complejos conjugados $\alpha_1 = \eta + i\,\omega, \quad \alpha_2 = \eta - i\,\omega$ y la solución se puede escribir

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\eta\, t}\left[c_1\, e^{i\omega\, t} + c_2\, e^{-i\omega\, t}\right] \\ &= e^{\eta\, t}\left[(c_1 + c_2)\cos(\omega\, t) + i\,(c_1 - c_2)\sin(\omega\, t)\right] \end{aligned}$$

Caso $\alpha_1 = \alpha_2$

Para el caso en que la ecuación característica admita una raíz doble, apelaremos a la forma de Jordan para la matriz fundamental. Recordemos que en la base de autovectores generalizados (ver formas de Jordan) la matriz de Jordan se escribe

$$J = \lambda\,\mathbf{I} + N$$

Para este caso, el autovalor será α (la raíz doble), la matriz es 2×2 y tendremos entonces que la forma de Jordan para la matriz fundamental

$$U = e^{\left[\begin{pmatrix}\alpha t & 0\\ 0 & \alpha t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]} = \begin{pmatrix}e^{\alpha t} & 0\\ 0 & e^{\alpha t}\end{pmatrix}\left[\mathbf{I} + \begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]$$

Entonces,

$$U = \begin{pmatrix}e^{\alpha t} & t\,e^{\alpha t}\\ 0 & e^{\alpha t}\end{pmatrix} \qquad \to x_1(t) = e^{\alpha t} \text{ y } x_2(t) = te^{\alpha t}$$

Problema No Homogéneo: Método de Variación de los Parámetros

Consideremos la ecuación

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = f(t)$$

Notemos que Si $x_h(t)$ es una solución de la ecuación homogénea y $x_p(t)$ es una *solución particular*, tendremos que $x_h(t) + x_p(t)$ es también solución de la ecuación

A partir de esta propiedad -trivial, debido a la linealidad de la ecuación diferencial- es que se propone como solución particular

$$x_p(t) = c_1(t)\,x_1(t) + c_2(t)\,x_2(t)$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las soluciones LI del problema homogéneo.

Cómo obtenemos $c_1(t)$ y $c_2(t)$? Imponiendo que la función propuesta satisfaga la ecuación diferencial

Las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$

A partir de la imposición de que la función propuesta satisfaga la ecuación, obtenemos ecuaciones para $c_1(t)$ y $c_2(t)$. La resolución de las ecuaciones nos brinda las funciones

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\int \frac{x_2(t)\, f(t)}{W}\, dt \\ c_2(t) &= \int \frac{x_1(t)\, f(t)}{W}\, dt \end{aligned}$$

donde

$$W = det\left[\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}\right] = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$$

que es el Wronskiano ya definido para sistemas de ecuaciones lineales

Reemplazando las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ en la solución particular

$$x_p(t) = c_1(t)\,x_1(t) + c_2(t)\,x_2(t)$$

Tenemos

$$x_p(t) = \left[-\int \frac{x_2(t^*)\,f(t^*)}{W}\,dt^*\right] x_1(t) + \left[\int \frac{x_1(t^*)\,f(t^*)}{W}\,dt\right] x_2(t)$$

$$x_p(t) = \int^t \left[\frac{x_1(t^*)x_2(t) - x_1(t^*)x_2(t)}{x_1(t^*)x_2'(t^*) - x_1'(t^*)x_2(t^*)}\right] f(t^*)\,dt^*$$

Llamando Función de Green (ya volveremos a hablar de esta función)

$$G(t,t^*) = \left[\frac{x_1(t^*)x_2(t) - x_1(t^*)x_2(t)}{x_1(t^*)x_2'(t^*) - x_1'(t^*)x_2(t^*)}\right]$$

Podemos escribir

$$x_p(t) = \int^t G(t,t^*)\,f(t^*)\,dt^*$$

Ejemplos

- Partícula libre: $x''(t) = 0$ (para hacerlo con este abordaje)
- Caída libre: $y''(t) = -g$
- Oscilador Armónico: $x''(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0$
- Oscilador Amortiguado: $x''(t) + b\, x'(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0$
- Oscilador Amortiguado y forzado: $x''(t) + b\, x'(t) + \omega_0^2\, x(t) = f(t)$
- Circuitos Corriente Alterna

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C}\, I = \frac{d}{dt} f_{em}(t)$$

con L: autoinductancia, R: Resistencia y C: capacitancia. La $f_{em}(t)$ es el potencial eléctrico suministrado *fuerza electromotriz*

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A. (1968)
- Miloni, O. *Notas de Algebra Lineal. Apuntes de Clase*, http://fcaglp.unlp.edu.ar/ nmaffione/Mat-Ava/pdfs/Apuntes-MA2015.pdf
- Naón, Carlos M.; Rossignoli, Raúl D.; Santangelo, Eve M. *Ecuaciones Diferenciales en Física*. Ed. EDULP, Libros de Cátedra. (2014) http://sedici.unlp.edu.ar (en esta página buscar por autor)
- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, *Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)