

# Matemáticas Especiales II

## Clase 19

### Transformada de Fourier I

#### Definiciones y Ejemplos

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

# Transformada de Fourier

- Forma Compleja de la Serie de Fourier
- El Salto al Continuo
- Transformada de Fourier
- Propiedades

# Forma Compleja de la Serie de Fourier

Dada la serie de Fourier de una función continua a trozos en el intervalo  $[-L, L]$

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \right\} 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}t\right) dt \right\} \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right) \\ + \left\{ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}t\right) dt \right\} \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right)$$

Expresando el coseno y el seno en forma exponencial podemos escribir

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x}$$

con

$$c_{\ell} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t} dt$$

# El salto al continuo

Asumamos que la función  $f(x)$  es tal que existe la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ .  
Vamos, de manera heurística, a construir la *Transformada de Fourier* extendiendo el intervalo  $[-L, L]$  a toda la recta real y pasando de la sumatoria a la integral.

Para este propósito consideremos **el paso de las sumas de Riemann a la integral**

$$\sum_{\ell} f(x_{\ell}) \Delta x_{\ell} \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Para ello, comencemos con la expresión

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_{\ell}}{\Delta \ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} \Delta \ell$$

Es más, siempre  $\Delta \ell = 1$  ya que así varía en la sumatoria!

# El salto al continuo. *continuación*

$$f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{c_{\ell}}{\Delta\ell} e^{i\frac{\ell\pi}{L}x} \Delta\ell$$

con

$$c_{\ell} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{\ell\pi}{L}t} dt$$

llamemos  $\omega = \frac{\pi\ell}{L}$ . Entonces,  $\omega$  varía conforme lo hace  $\ell$ ,  $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}\Delta\ell$  (y como  $\Delta\ell = 1 \rightarrow \Delta\omega \cdot L = \pi$ )

Entonces, usando el cambio de variables

$$f(x) = \sum_{\frac{\ell}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} \frac{c_{\omega}}{\Delta\omega} e^{i\omega x} \Delta\omega = \sum_{\frac{\ell}{\pi}\omega=-\infty}^{\infty} c_{\omega} \frac{L}{\pi} e^{i\omega x} \Delta\omega$$

Como una suma de Riemann, pasamos a la integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega) L}{\pi} e^{i\omega x} d\omega$$

## El salto al continuo. *continuación*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega) L}{\pi} e^{i\omega x} d\omega$$

con

$$\frac{c(\omega) L}{\pi} = \frac{L}{\pi} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Lo único que falta es tomar límite para  $L \rightarrow \infty$  el cual es necesario incluso para pasar de la suma de Riemann a la integral (ya que si  $\Delta\omega \rightarrow 0$  debemos tener  $L \rightarrow \infty$  para que el producto de siempre  $\pi$ )

Tomando entonces  $\lim_{L \rightarrow \infty}$  tenemos la **integral de Fourier**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

con

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

# La Transformada de Fourier

A partir de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

la función

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

es la llamada **Transformada de Fourier**

Otra formulación es

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

la función

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Llamando  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$  y  $G(\omega)$  a las transf. de Fourier de  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente, podemos demostrar las siguientes propiedades:

- **Producto Interno. Identidad de Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{G(\omega)} d\omega$$

- **Norma.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

- **Convolución.**

$$\mathcal{F}[f * g] = F(\omega) G(\omega)$$

# Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)