Matemáticas Especiales II
Clase 17
Series de Fourier I

Aspectos Algebraicos

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Series de Fourier
Aspectos Algebraicos

- Espacios de Dimensión finita. Coeficientes de Fourier.
- Dimensión Infinita. Convergencia en Media
- Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval
- Ejemplos de Series de Fourier

Sea V un espacio euclídeo de dimensión n.
Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ una base ortogonal de V. Entonces, para $\vec{v} \in V$ tenemos

$$\vec{v} = \alpha^{\ell}\,\mathbf{e}_{\ell} \qquad \text{sumando en } \ell \text{ desde } 1 \text{ a } n$$

Multiplicando a ambos miembros por $\mathbf{e}_k$ tenemos

$$\langle \vec{v}|\mathbf{e}_k\rangle = \langle \alpha^{\ell}\,\mathbf{e}_{\ell}|\mathbf{e}_k\rangle = \alpha^{\ell}\langle \mathbf{e}_{\ell}|\mathbf{e}_k\rangle$$

Como la base es ortogonal, tenemos que $\langle \mathbf{e}_{\ell}|\mathbf{e}_k\rangle = ||\mathbf{e}_k||^2\,\delta_{\ell k}$, entonces

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{v}|\mathbf{e}_k\rangle}{||\mathbf{e}_k||^2}\,\mathbf{e}_k \qquad \text{sumando en } k \text{ desde } 1 \text{ a } n$$

Lo que significa que

$$\frac{\langle \vec{v}|\mathbf{e}_k\rangle}{||\mathbf{e}_k||^2}$$

son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base ortogonal. Estas coordenadas se las denominan coeficientes de Fourier de $\vec{v}$.

Subespacios. Aproximaciones

Problema: Consideremos un espacio euclídeo V de dimensión n. Sea $\vec{v} \in V$ y sea W un subespacio de V de dimensión m. La pregunta es:

Cuál es el vector $\vec{w} \in W$ "más parecido" a $\vec{v}$?

Respuesta:

$$\vec{w} = \sum_{\ell=1}^{m} \langle \vec{v} | \mathbf{e}_\ell \rangle \, \mathbf{e}_\ell$$

Pistas

- Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_m\}$ una base ortonormal de W
- Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormal de V $(n > m)$
- El vector que mejor se aproxima ($||\vec{v} - \vec{w}||$ mínimo) será aquel que cumpla (graficar)

$$(\vec{v} - \vec{w}) \perp \vec{w}$$

1. Dado un espacio $W \subset V$ un subespacio V. Sea $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m\}$ una base ortogonal de W. Demostrar que dado $\vec{v} \in V$,

$$\left|\left|\vec{v} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle} \mathbf{e}_i \right|\right| \leq ||\vec{v} - \vec{w}||$$

para todo $\vec{w} \in W$

2. *Convergencia en Media*. La serie formal $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ se dice que *converge en media a* $\vec{v}$ si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} \left|\left|\vec{v} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \right|\right| = 0$$

3. Demostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ converge en media a un vector $\vec{v}$, entonces $\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle}{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle}$.

Pista: Partir de la desigualdad del punto **1.** y la convergencia en media de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{e}_i$ a $\vec{v}$

Desigualdad de Bessel

Sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ un conjunto ortonormal de vectores en el espacio euclídeo V, de dimensión infinita. Sea $\vec{v} \in V$. Entonces

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle^2 \leq ||\vec{v}||^2$$

que es la desigualdad denominada desigualdad de Bessel.
Pista: Partir de

$$0 \leq \left|\left| \vec{v} - \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle \right|\right|^2$$

desarrollar el cuadrado (como el producto interno del vector diferencia por sí mismo), comprobando que

$$\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_i \right) | \left(\sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{e}_j | \vec{v} \rangle \mathbf{e}_j \right) \rangle = \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle^2$$

Igualdad de Parseval

Igualdad de Parseval. Asumiendo que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ es una base ortonormal de V, demostrar que se cumple

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle^2 = ||\vec{v}||^2$$

Pista para la demostración: Como se supone que es una base, la serie formal converge en media

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \vec{v} - \sum_{\ell=1}^{n} \langle \mathbf{e}_i | \vec{v} \rangle \right\|^2 = 0$$

y hacer un razonamiento análogo al hecho en el punto anterior.

Ejercicio. Escribir la Desigualdad de Bessel y la Igualdad de Parseval en el caso que las bases sean ortogonales, no ortonormales.

La Serie de Fourier

1. Considerar en el espacio de funciones continuas a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ el producto interno

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

2. Demostrar que el conjunto $\{1; \cos(x), \cos(2x), \ldots; \sin(x), \sin(2x), \ldots\}$ que se denota

$$\{1; \cos(\ell\, x); \sin(\ell\, x)\}_{\ell=1,2,3,\ldots}$$

es ortogonal.

3. Dada una función continua a trozos en $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) = a_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} [a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)]$$

Un Ejemplo

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

La serie de Fourier de la función es,

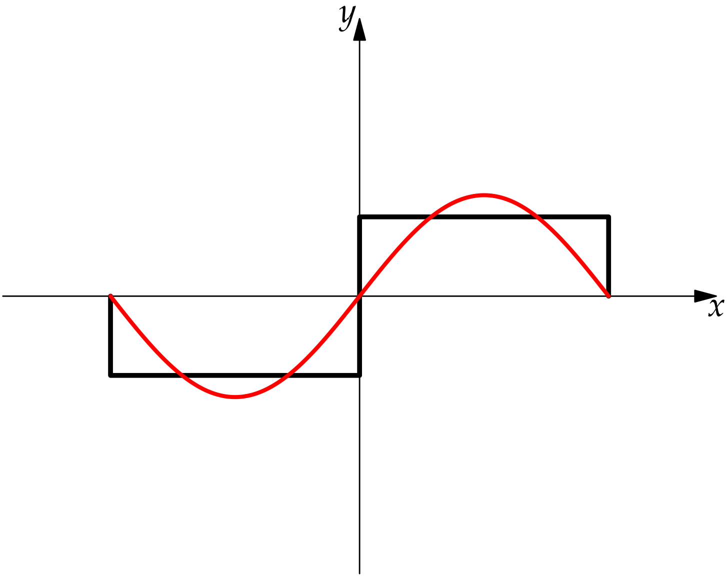
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \cdots\right\}$$

Aplicando la Igualdad de Parseval, se obtiene

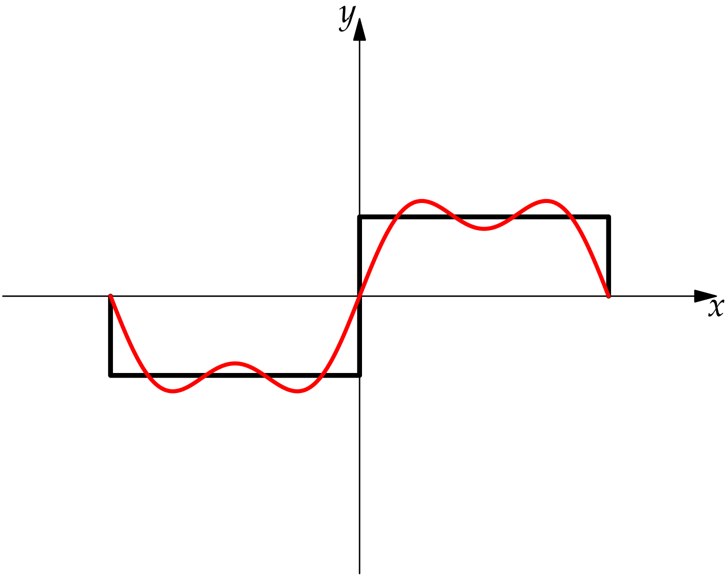
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2}\cdots = \frac{\pi}{8}$$

Con Fourier obtenemos propiedades aritméticas!

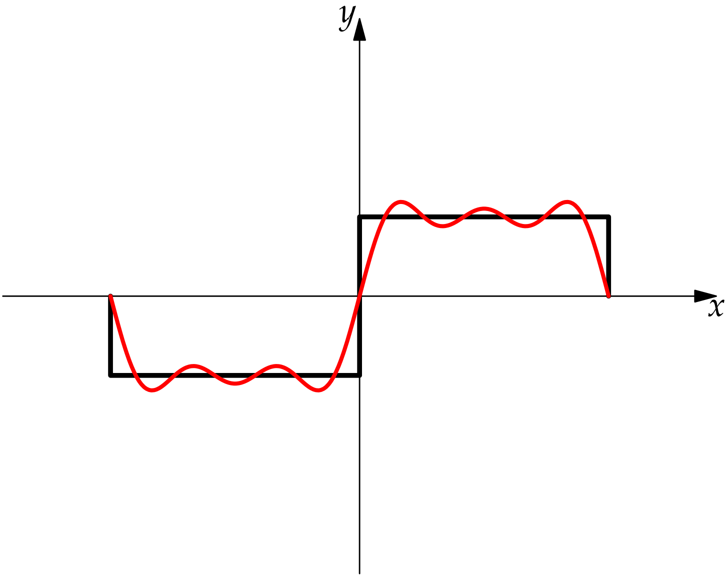
$n = 1$



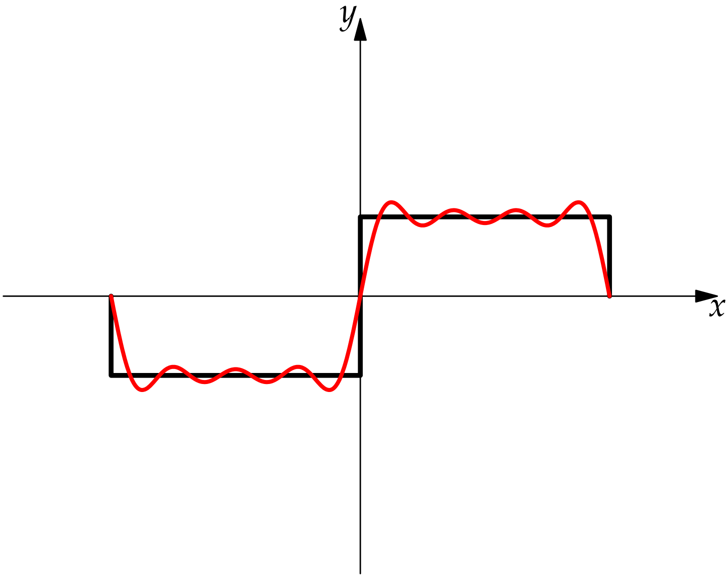
$n = 3$



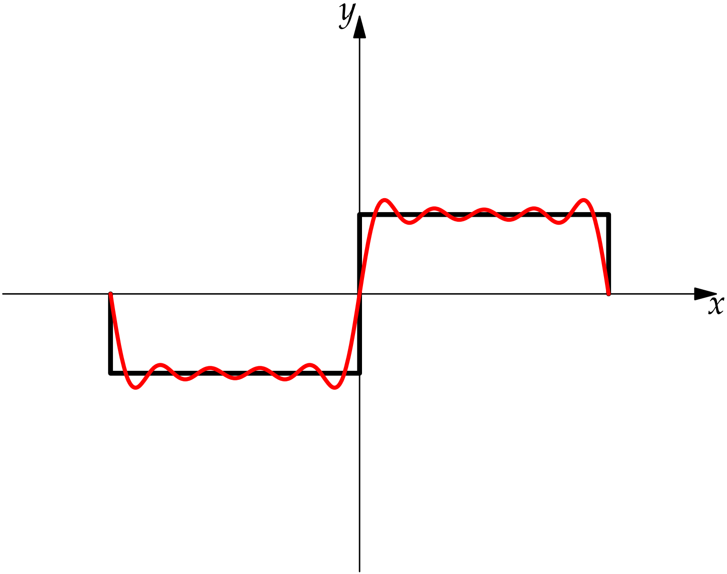
$n = 5$



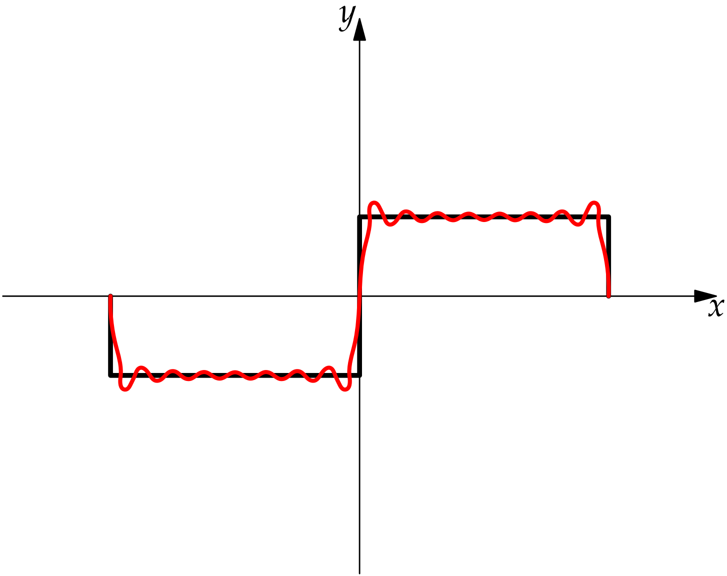
$n = 7$



$n = 9$



$n = 15$



Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve. *Ecuaciones Diferenciales en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Churchill, Ruel, V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Ed. Mc Graw Hill (1966)
- Spiegel, Murray. *Fourier Analysis, Schaum's Series*, Ed. Mc Graw Hill (1974)
- Sommerfeld, Arnold. *Partial Differential Equations in Physics*, Ed. Academic Press (1949)