Matemáticas Especiales II
Clase 16
Ecuación de Bessel

Funciones de Bessel

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Ecuación de Bessel
Funciones de Bessel

- Ecuación Diferencial de Bessel de orden p
- Soluciones de la Ec. de Bessel
- Propiedades
- Función Generatriz
- Representación Integral
- Algunas Aplicaciones a la Física.

La Ecuación. **Ecuación Diferencial de Bessel se escribe**

$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + (x^2 - p^2)\, y(x) = 0, \qquad p > 0$$

Podemos notar que $x = 0$ es un punto singular regular

Entonces, podemos proponer como solución

$$y(x) = x^r \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell\, x^\ell$$

Y la ecuación indicial asociada será:

$$r^2 - p^2 = 0, \qquad \rightarrow \qquad r = \pm p$$

Entonces, una primera solución será

$$y_1(x) = x^p \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell\, x^\ell, \qquad p \geq 0$$

Método de Frobenius. Sustitución en la Ec. Diferencial

Proponiendo como solución, $y = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^{\ell+p}$ en la ecuación diferencial tenemos

- $$x^2\, y'' = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+p)(\ell+p-1) c_\ell x^{\ell+p} = p(p-1)c_0\, x^p + (p+1)p c_1\, x^{p+1} + \sum_{\ell=2}^{\infty} (\ell+p)(\ell+p-1) c_\ell x^{\ell+p}$$
- $$x\, y' = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+p) c_\ell x^{\ell+p} = p\, c_0 x^p + (p+1) c_1 x^{p+1} + \sum_{\ell=2}^{\infty} (\ell+p) c_\ell x^{\ell+p}$$
- $$(x^2 - p^2)\, y = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^{\ell+p+2} - p^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^{\ell+p} = -p^2 c_0 x^p - p^2 c_1 x^{p+1} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \left[c_{\ell-2} - p^2 c_\ell \right] x^{\ell+p}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, y dividiendo por x^p tenemos

$$(2p+1)c_1\, x + \sum_{\ell=2}^{\infty} \left[\ell(2p+\ell) c_\ell + c_{\ell-2} \right] x^\ell = 0$$

(El término de orden x^0 se anula al reemplazar, con lo que c_0 es arbitrario)

Recurrencia de los coeficientes

A partir de lo obtenido, tenemos que

$$c_1 = 0, \qquad c_{\ell+2} = -\frac{c_\ell}{\ell(2p+\ell)}$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_3 = c_5 = \cdots = 0 \\
c_2 &= -\frac{c_0}{2(2p+2)} = -\frac{c_0}{2^2(p+1)} \\
c_4 &= -\frac{c_2}{4(2p+4)} = \frac{c_0}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} = \frac{c_0}{2^4\,2!\,(p+1)(p+2)} \\
\vdots &= \vdots \\
c_{2\ell} &= (-1)^\ell \frac{c_0}{2^{2\ell}\ell!(p+1)(p+2)\cdots(p+\ell)}
\end{aligned}$$

La función de Bessel de orden p

Como vimos, la solución de la ecuación de Bessel de orden $p \geq 0$ se puede escribir, en términos generales

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\frac{c_0}{2^{2\ell}\ell!(p+1)(p+2)\cdots(p+\ell)}x^{2\ell+p}$$

Notemos además que, utilizando la función *Gamma*

$$(p+1)(p+2)\cdots(p+\ell)=\frac{\Gamma(p+\ell+1)}{\Gamma(p+1)}$$

Como c_0 es arbitrario, si escogemos $c_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ tenemos la expresión

$$J_p(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!\,\Gamma(p+\ell+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell+p}$$

Función de Bessel de orden p de primera clase

Diferentes tipos de Solución

El método de Frobenius establece 3 casos posibles, respecto a la solución de la ecuación indicial.

a. $r_1 \neq r_2$ con $r_2 - r_1 \notin \mathbb{Z}$

b. $r_1 = r_2$

c. $r_1 \neq r_2$ con $r_2 - r_1 \in \mathbb{Z}$

Para la ecuación de Bessel, tenemos que $r_{1,2} = \pm p$, con lo cual los casos son

a. $p \neq 0$ con $2p \notin \mathbb{Z}$

b. $p = 0$

c. $p \neq 0$ con $2p \in \mathbb{Z}$

Para este caso, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel serán

$$
\begin{aligned}
J_p(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\,\Gamma(p+\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell+p} \\
J_{-p}(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\,\Gamma(-p+\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell-p}
\end{aligned}
$$

Con lo que la solución general de la Ecuación de Bessel, será

$$
y(x) = c_1\, J_p(x) + c_2\, J_{-p}(x), \qquad p \neq 0,\ 2p \notin \mathbb{Z}, \quad x > 0
$$

Observación: Este caso contiene a p entero

El caso $p = 0$

El caso $p = 0$, admite como solución

$$J_0(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(\ell!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell}$$

Y debemos buscar la segunda solución a la ecuación.
Según el método de Frobenius, podemos buscar la segunda solución en la forma

$$K_0(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \, x^\ell + J_0(x) \log(x), \qquad x > 0$$

Además, para este caso, la ecuación diferencial se reduce a

$$x \, y''(x) + y'(x) + x \, y(x) = 0$$

Ajustando los coeficientes, se obtiene

$$K_0(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + + \frac{1}{\ell}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell} + J_0(x) \log(x)$$

Caso $p \neq 0$, $2p \in \mathbb{Z}$

Nuevamente, aplicando los resultados provenientes del método de Frobenius, la segunda solución linealmente independiente con $J_p(x)$ será de la forma

$$K_p(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \, x^{\ell+p} + c \, J_p(x) \log(x), \qquad c = \text{constante}, \qquad x > 0$$

Para obtener los coeficientes y la constante c debemos sustituir en la ecuación diferencial.

La obtención de la expresión es engorrosa y la dejamos para la práctica!

Propiedades

- **Derivación.**

$$\frac{d}{dx}\left[x^p\, J_p(x)\right] = x^p\, J_{p-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p}\, J_p(x)\right] = -x^{-p}\, J_{p+1}(x)$$

- **Recurrencia.**

$$x\, J_{p+1}(x) - 2p\, J_p(x) + x\, J_{p-1}(x) = 0$$

$$J_{p+1}(x) + 2\, J_p'(x) - J_{p-1}(x) = 0$$

- **Función Generatriz.**

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell(x)\, t^\ell$$

- **Forma Integral.**

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[n\theta - x\,\sin(\theta)]d\theta$$

Función de Bessel de primera clase de orden semientero

Consideremos $p = 1/2$ Tenemos que

$$J_{1/2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell}$$

Podemos notar que

$$\Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdots \frac{2\ell + 1}{2}\right]$$

Reemplazando en la función de Bessel y agrupando convenientemente, se obtiene

$$J_{1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma(3/2)} \sin(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x)$$

Aplicación: Ecuación de Laplace en coor. Cilíndricas

Supongamos una función **u** que depende de las variables ρ y z (no depende de la variable angular). El laplaciano se puede escribir

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0$$

Mediante el **Método de Separación de variables** se propone

$$\mathbf{u} = R(\rho) \cdot Z(z)$$

Entonces, reemplazando en la ecuación obtenemos el sistema

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \lambda^2 \, R(\rho) = 0$$

Bessel de orden cero!!

$$Z''(z) - \lambda^2 \, Z(z) = 0$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol II Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Bowman, Frank *Introduction to Bessel Functions*, Ed. Dover (1958)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)