Matemáticas Especiales II
Clase 13
Ecuaciones Fuchsianas

Ecuación de Riemann-Papperitz

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Ecuaciones Fuchsianas
Ecuación de Riemann-Papperitz

- Construcción de Ecuaciones Fuchsianas
- Ecuación de Riemann-Papperitz
- Ecuación Hipergeométrica
- Ecuación Hipergeométrica Confluente

Definición. *Una ecuación diferencial de segundo orden se denomina* **Fuchsianas** *si* **todos sus puntos singulares son regulares**

En esta clase vamos a construir ecuaciones Fuchsianas

Propiedad. Las ecuaciones Fuchsianas son invariantes por transformaciones de *Möbius*

$$w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

Construcción de Ecuaciones Fuchsianas

- Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente dos puntos singulares regulares finitos

$$y''(x) + \left[\frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2}\right] y'(x) + \left[\frac{\beta_1\,(x_1 - x_2)}{x - x_1} + \frac{\beta_2\,(x_2 - x_1)}{x - x_2}\right] \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} y(x) = 0$$

- Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente dos puntos singulares regulares. Uno en el $x = 0$ y otro en el infinito

$$z^2(z - 1)\frac{d^2y(z)}{dz^2} + (a + z\,b)\,z\,\frac{dy(z)}{dz} + (c + \ z\,d)\,y(z) = 0$$

- Construcción de una Ecuación Diferencial con exactamente tres puntos singulares regulares finitos

$$\begin{aligned} y''(x) \quad &+ \quad \left[\frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2} + \frac{\alpha_3}{x - x_3}\right] y'(x) + \\ &+ \quad \left[\frac{\beta_1\,(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)}{x - x_1} + \frac{\beta_2\,(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}{x - x_2} + \right. \\ &+ \quad \left. \frac{\beta_3\,(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{x - x_3}\right] \frac{y(x)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} = 0 \end{aligned}$$

La Ecuación de Riemann-Papperitz

La ecuación de Riemann-Papperitz es una ecuación Fuchsiana con tres puntos singulares finitos y el punto en el infinito es ordinario

$$
\begin{aligned}
y''(x) \quad &+ \quad \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{x-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right]y'(x)+ \\
&+ \quad \left[\frac{\alpha\,\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a}+\frac{\beta\,\beta'\,(b-a)(b-c)}{x-b}+\right. \\
&+ \quad \left.\frac{\gamma\,\gamma'\,(c-a)(c-b)}{x-c}\right]\frac{y(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0
\end{aligned}
$$

donde $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ son las raíces de la ecuación indicial asociada a cada singularidad.
con la condición de *Riemann* (condición sobre el punto en el infinito)

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$$

Notación para la Solución de la Ecuación de Riemann-Papperitz

Dada la ecuación de Riemann-Papperitz

$$
\begin{aligned}
y''(x) \quad &+ \quad \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{x-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right] y'(x)+ \\
&+ \quad \left[\frac{\alpha\,\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a}+\frac{\beta\,\beta'\,(b-a)(b-c)}{x-b}+\right. \\
&+ \quad \left.\frac{\gamma\,\gamma'\,(c-a)(c-b)}{x-c}\right]\frac{y(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0
\end{aligned}
$$

Denotamos la solución

$$
y(x) = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}
$$

Propiedades

$$(x-a)^{\ell_1}(x-b)^{\ell_2}(x-c)^{\ell_3} P \left\{ \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\} =$$

$$= \quad P \left\{ \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+\ell_1 & \beta+\ell_2 & \gamma+\ell_3 & x \\ \alpha'+\ell_1 & \beta'+\ell_2 & \gamma'+\ell_3 & \end{matrix} \right\}$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* . http://fcaglp.unlp.edu.ar/ nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf. (2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)