Matemáticas Especiales II
Clase 11
Ecuaciones de 2do Orden

con Coeficientes Variables
?
Ec. de Euler

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Ecuaciones de 2do Orden

con

Coeficientes Variables

- Definición de Punto Ordinario
- Soluciones en Serie. Análisis de Convergencia
- Definición de Puntos Singulares Regulares.
- Ecuación de Euler.

Punto Ordinario. Definición

Definición. Punto Ordinario. *Dada una ecuación diferencial de la forma*

$$y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \frac{a_0(x)}{a_n(x)}\, y(x) \;=\; 0$$

Diremos que x_0 es un punto ordinario si y sólo si las funciones

$$\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)},\ \frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)},\ldots,\ \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$$

son analíticas en x_0.

La solución analítica será buscada en serie

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, x^j$$

La convergencia de las series está garantizada por la analiticidad de los coeficientes

Soluciones en Series

La solución de la ecuación diferencial la buscamos proponiendo una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_j \, x^{\ell}$$

Si x_0 es un punto ordinario, buscaremos la solución mediante

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \,(x - x_0)^{\ell} \\
y'(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \, c_\ell \,(x - x_0)^{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \, c_{\ell+1} \,(x - x_0)^{\ell} \\
y''(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \,(\ell-1) \, c_\ell \,(x - x_0)^{\ell-2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)\,(\ell+1) \, c_{\ell+2} \,(x - x_0)^{\ell}
\end{aligned}$$

Será necesario siempre el arreglo de coeficientes y ordenamiento en potencias de x

Intervalo de Convergencia

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$$

para la cual, x_0 es un punto ordinario.
Tendremos una solución en serie,

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \, (x - x_0)^\ell$$

Dónde esperamos convergencia de esta serie?

Hay que pensar en el plano complejo, no en la recta real

El radio de convergencia de la serie será

$$|x - x_0| < \rho$$

donde ρ es la distancia a la singularidad más próxima (en el plano complejo!)

Ejemplo

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + \frac{1}{1+x^2}\, y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = 0$$

Notemos que $x_0 = \frac{1}{2}$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial.
El desarrollo

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \left(x - \frac{1}{2}\right)^\ell$$

Teniendo en cuenta que los puntos de singularidad son $x = 1/2$ y $x = \pm i$ debemos calcular la distancia entre $x = 1/2$ (**en complejos!**) y el mínimo será el radio de convergencia del desarrollo.
Tenemos que $\rho_1 = \frac{1}{2}$ (distancia de $x = 1/2$ a $x = 0$) y $\rho_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (distancia de $x = 1/2$ a $x = \pm i$). Entonces, como $\rho_1 < \rho_2$ la solución en serie tendrá un radio de convergencia

$$|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Busquemos una solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$y''(x) + y(x) = 0$$

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \, x^\ell \quad \rightarrow \quad y''(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1) c_{\ell+2} \, x^\ell$$

Al reemplazar en la ecuación y agrupando, obtenemos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ (\ell+2)(\ell+1) c_{\ell+2} + c_\ell \right\} x^\ell = 0$$

Genera la recurrencia

$$c_{\ell+2} = \frac{-1}{(\ell+2)(\ell+1)} \Longrightarrow c_{2j} = c_0 \frac{(-1)^j}{(2j)!} \quad \text{y} \quad c_{2j+1} = c_1 \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}$$

Entonces

$$y(x) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} + c_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = c_0 \cos(x) + c_1 \sin(x)$$

Definición. Punto Singular Regular. *Dada una ecuación diferencial de segundo orden de la forma*

$$P(x)\,y''(x) + Q(x)\,y'(x) + R(x)\,y(x) \;=\; 0$$

Diremos que x_0 es un punto singular regular si y sólo si las funciones

$$(x - x_0)\,\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad y \qquad (x - x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)}$$

son analíticas en x_0.

La definición no es caprichosa, sino que estará relacionada con la *Ecuación de Euler*

Ecuación de Euler

Consideremos la ecuación diferencial

$$x^2\, y''(x) + \alpha\, x\, y'(x) + \beta\, y(x) \;=\; 0$$

donde α y β son números reales.
Notemos que para esta ecuación, $P(x) = x^2$, $Q(x) = \alpha x$ y $R(x) = \beta$.
Además, $x = 0$ es un punto singular regular
Fijemonos que la ecuación de Euler es satisfecha por una función potencial, ya que si proponemos $y(x) = x^r$

- $x^2\, y''(x) = r\,(r-1)x^r$
- $\alpha\, x\, y'(x) = \alpha\, r\, x^r$
- $\beta\, y(x) = \beta\, x^r$

Con lo cual, al reemplazar en la ecuación diferencial, nos queda

$$\left[r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta\right] x^r = 0$$

Entonces, la potencia la obtenemos resolviendo la **Ecuación Indicial**

$$r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta = 0$$

Soluciones posibles

La ecuación indicial, pensada en el campo de los complejos, admite como posibilidades:

- $r_1 \neq r_2$
- $r_1 = r_2$

<u>Caso $r_1 \neq r_2$</u>

Para este caso, la solución general de la ecuación de Euler, será

$$y(x) = a_1\, x^{r_1} + a_2\, x^{r_2}$$

<u>Caso $r_1 = r_2$</u>

Al tener la ecuación indicial dos raíces iguales, el polinomio se puede escribir $(r - r_1)^2$. Entonces al sustituir en la ecuación diferencial, tenemos

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\,\frac{d}{dx} + \beta\right] x^r = (r - r_1)^2\, x^r$$

que vale cero al evaluar en $r = r_1$

En notación de operadores,

$$L : \frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta \implies L\left[x^r\right] = (r - r_1)^2\, r^r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{L\left[x^r\right]\right\} = L\left\{\frac{\partial x^r}{\partial r}\right\}$$

Entonces, como

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(r - r_1)^2 x^{r_1}\right] = 2(r - r_1)x^r + (r - r_1)^2 x^r \ln(|x|)$$

tenemos

$$2(r - r_1)x^r + (r - r_1)^2 x^r \ln(|x|) = L\left[x^r\ \ln(|x|)\right]$$

que será cero en $r = r_1$ Entonces, las solución general es

$$y(x) = c_1\, x^{r_1} + c_2\, x^{r_1}\ \ln\left|x^{r_1}\right|$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* . http://fcaglp.unlp.edu.ar/ nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf. (2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)