Matemáticas Especiales II
Clase 1
Métodos Elementales de
de Resolución

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Definiciones Previas y Métodos Elementales de de Resolución de Ecuaciones Diferenciales

- Definiciones
- Variables Separables
- Ecuación Lineal
- Ecuaciones Exactas
- Factor Integrante
- Ecuaciones Homogéneas

Definiciones Previas

- **Ecuación Diferencial:** Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra a una función (incógnita) y sus derivadas.
- **Solución:** Una función se dice que es solución si al sustituirla en la ecuación diferencial produce una identidad.
- **Ecuación Diferencial Ordinaria:** Cuando la función depende de una sola variable independiente, se dice que la ecuación diferencial es *ordinaria.*
- **Ecuación Diferencial Parcial:** Si la ecuación involucra derivadas parciales de una función incógnita de varias variables, la ecuación diferencial se denomina *ecuación diferencial parcial.*
- **Orden de la Ecuación Diferencial:** El *orden* de la ecuación diferencial está asociado a la mayor derivada que aparece en la ecuación.
- **Grado de la Ecuación Diferencial Ordinaria:** El grado de una ecuación diferencial es la mayor potencia con la que aparece tanto la función incógnita como sus derivadas.

Variables Separables

Definición *de Ecuación Separable. Un ecuación diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

se denomina *<u>separable</u>* *si puede escribirse como*

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x)\, f_2(t)$$

Casos Particulares

- Si

  $$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{de dice que la ecuación es } \textbf{ecuación autónoma}$$

- Si

  $$\frac{dx}{dt} = g(t) \quad \text{de dice que la ecuación es una } \textbf{integración trivial}$$

Variables Separables. Método de Resolución

Dada la ecuación separable,

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x)\, f_2(t)$$

podemos reescribirla como

$$\frac{1}{f_1(x)}\frac{dx}{dt} = f_2(t)$$

Ahora, notemos que

$$\frac{1}{f_1(x)}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[F_1(x(t))\right] \quad \rightarrow \quad F(x(t)) = \int f_2(t)\, dt + C$$

Ahora, como $\frac{1}{f_1(x)} = \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$ entonces, $F(x) = \int \frac{1}{f_1(x)} dx$ con lo que podemos resolver la ecuación

$$\int \frac{1}{f_1(x)} dx = \int f_2(t)\, dt + C \quad \text{resolviendo tenemos} \quad x(t)$$

Resolución *"Non Sancta"*
Dada la ecuación separable, $\frac{dx}{dt} = f_1(x)\, f_2(t)$ si consideramos $\frac{dx}{dt}$ como un cociente (no lo es!) podríamos escribir

$$\frac{1}{f_1(x)}\, dx = f_2(t)\, dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{f_1(x)}\, dx = \int f_2(t)\, dt + C \rightarrow x(t)$$

—— 0 ——

Ejemplos Resolver las siguientes ecuaciones separables

- $$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t}$$
- $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad y(4) = -3$$ No siempre es x(t)
- $$\frac{dx}{dt} = x^2 - 4$$ Pérdida de Solución! (conversar)

Definición. *Decimos que la ecuación es lineal si la podemos escribir como*

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)$$

- Caso homogéneo: $b(t) = 0$. Es a variable separable y la solución general se puede escribir como $x_h(t) = C\,e^{\int a(t)\,dt}, \qquad C = Constante$
- Caso no-homogéneo.
  Idea: Aprovechar la solución de la homogénea, pero con C= C(t) :

Entonces, se propone $x(t) = C(t)e^{\int a(t)\,dt}$. Imponiendo que se satisfaga la ecuación diferencial, tenemos que $C(t)$ debe satisfacer

$$C(t) = \int b(t)\,e^{-\int a(t)\,dt} + K$$

lo que implica que la solución es dada como en fórmula!

$$x(t) = \left\{ \int b(t)\,e^{-\int a(t)\,dt} + K \right\} e^{\int a(t)\,dt}$$

Ecuaciones Exactas

Si $\varphi(x,t)$ es diferenciable en un entorno de un punto (x_0,t_0) además $\varphi(x,t)=c$ podemos asumir (si $\frac{\partial\phi}{\partial x}\neq 0$) que define implícitamente x como función de t tenemos

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(x,t)\right]=0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=0$$

En términos de la diferencial de la función se puede escribir

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\,dt=0$$

Inversamente, si tenemos una ecuación diferencial escrita en la forma

$$M(x,t)\,dx+N(x,t)\,dt=0$$

Si existe una función $\varphi(x,t)$ tal que

$$M(x,t)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}, \qquad N(x,t)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$$

entonces, existen curvas integrales

$$\varphi(x,t)=c$$

Ecuaciones Exactas. Condiciones Necesarias y Suficientes

Teorema. *Dada la ecuación diferencial*

$$M(x,t)\,dx + N(x,t)\,dt = 0$$

donde las funciones M, N, ∂M, ∂N *son continuas en un determinado dominio simplemente conexo, y además*

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}$$

existe una curva integral definida a través de

$$\varphi(x,t) = c$$

La demostración se basa en las condiciones necesarias para la diferenciabilidad
La construcción de la función $\varphi(x,t)$ se obtiene directamente con la técnica de obtención de función potencial.

Factor Integrante

Para el caso en que la ecuación diferencial

$$M(x,t)\,dx + N(x,t)\,dt = 0$$

no sea exacta, se busca una función $\mu(x,t)$ de manera tal que la ecuación

$$\mu(x,t)\,M(x,t)\,dx + \mu(x,t)\,N(x,t)\,dt = 0$$

lo sea
La función $\mu(x,t)$ es denominada *factor integrante* y se obtiene a partir de imponer la condición

$$\frac{\partial[\mu(x,t)\,M(x,t)]}{\partial t} = \frac{\partial[\mu(x,t)\,N(x,t)]}{\partial x}$$

Factor Integrante. Determinación

Si la ecuación no es exacta y proponemos un factor integrante nos encontramos que debe satisfacerse

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial x} N(x,t) - \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} M(x,t) = \mu(x,t) \left[\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} \right]$$

Ecuación diferencial parcial para $\mu(x,t)$! Estamos peor!

Propuesta: Asumir que $\mu(x,t)$ depende de una sola variable

- $\mu = \mu(x)$ tenemos para μ la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}}{N(x,t)} \right]}_{\text{debe ser sólo función de } x!!} \mu(x)$$

- $\mu = \mu(t)$ tenemos para μ la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,t)}{\partial t}}{M(x,t)} \right]}_{\text{debe ser sólo función de } t!!} \mu(t)$$

Ecuaciones Homogéneas

Definición. *Decimos que una función $f(x,t)$ es <u>homogénea de grado n</u> si y sólo si*

$$f(\lambda x, \lambda t) = \lambda^n f(x,t)$$

Definición. *Decimos que una ecuación diferencial*

$$M(x,t)\,dx + N(x,t)\,dt = 0$$

es <u>homogénea de grado n</u> si y sólo si las funciones $M(x,t)$ y $N(x,t)$ lo son

Podemos notar que $x = x \cdot 1$ y $t = x\,\frac{t}{x}$. Si cambiamos la variable $u = \frac{t}{x}$ tendremos que $t = u\,x$ con lo que

$$dt = u\,dx + x\,dt$$

Si la ecuación dif. es homogénea e introducimos el cambio de variables la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{N(1,u)}{M(1,u) + u\,N(1,u)}\,du = 0 \qquad \text{variables separables}$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)
- Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Ed. C.E.C.S.A (1968)