Matemática Avanzada

Clase Nro. 7

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Algunos problemas

- Supongamos que tenemos una matriz cuadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y queremos calcular $\mathbf{A}^{100}$
- Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a_1\, x + b_1\, y \\
\frac{dy}{dt} &= a_2\, x + b_2\, y
\end{aligned}
$$

Notemos que en ambos casos, si la matriz es diagonal el problema se reduce bastante

Matrices diagonales. Potencias

Si una matriz es diagonal, tiene la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{pmatrix} d_1^{100} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{100} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^{100} \end{pmatrix}$$

Esto es, no calculamos 99 producto de matrices, sino potencias de números, que es, significativamente menos trabajo computacional.

Matrices diagonales. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Resulta simple de resolver si está en una forma diagonal, ya que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= d_1\, x \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0\, e^{d_1\, t} \\ \frac{dy}{dt} &= d_2\, y \quad \rightarrow \quad y(t) = y_0\, e^{d_2\, t} \end{aligned}$$

Objetivo: Diagonalización

Vamos desarrollar procedimientos a partir de los cuales poder determinar si una matriz puede llevarse a la forma diagonal

Autovalores y autovectores. Definiciones.

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Consideremos un operador lineal, es decir, una transformación lineal $T : V \to V$. Un autovalor de T es un número $\lambda \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, tal que existe un vector no nulo de V, $\vec{v}$ que satisface

$$T(\vec{v}) = \lambda\,\vec{v}$$

Al vector $\vec{v}$ que satisface la ecuación se lo denomina autovector.

Observaciones

- Un autovalor puede ser nulo
- Un autovector, por definición, es no nulo
- No necesariamente un autovalor posee un único autovector asociado.

Subespacios Propios

Definición

La colección de todos los autovectores asociados a un mismo autovalor λ forman un subespacio de V que se llama espacio propio asociado al autovalor λ.

En efecto, dado un autovalor λ podemos notar que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son autovectores asociados a λ entonces, el vector $\vec{w} = c\,\vec{u} + \vec{v}$ es también un autovector asociado a λ

$$T(\vec{w}) = T(c\,\vec{u}+\vec{v}) = cT(\vec{u})+T(\vec{v}) = c\,\lambda\,\vec{u}+\lambda\,\vec{v} = \lambda\,(c\,\vec{u}+\vec{v})$$

Entonces

$$T(\vec{w}) = \lambda\,\vec{w} \qquad \square$$

El Teorema

Teorema

Sea T un operador lineal sobre un espacio V de dimensión finita y sea λ un escalar. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *a) λ es un autovalor de T*
- *b) El operador $T - \lambda\, I_d$ es singular*
- *c) Si $[T]$ es la matriz asociada de T respecto a una determinada base, entonces*

$$det\left([T] - \lambda\, I_{n\times n}\right) = 0$$

Para demostrar el Teorema, basta con demostrar que $a) \to b)$, $b) \to c)$ y que $c) \to a)$

Aspectos procedimentales

1. Hallar los autovalores a partir de la ecuación *característica*

$$det\,([T] - \lambda\, I_{n\times n}) = 0$$

2. Para cada autovalor, λ, se busca el subespacio propio teniendo en cuenta que

$$\{[T] - \lambda\, I_d\} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = 0$$

Resolver esta ecuación en $\vec{v}$ es obtener las <u>coordenadas</u> en la base en la que fue escrita la matriz del operador.

Reflexión sobre el procedimiento

Reflexiones

- Los autovalores los obtenemos a partir de una ecuación algebraica
- Los subespacios propios los obtenemos a partir de obtener los generadores de

$$Nu\,\{[T] - \lambda\, I_d\}$$

- Los generadores de cada núcleo estará dado en coordenadas, nada indica *a priori* que sean vectores de $\mathbb{R}^n$

Teorema

Autovectores asociados a distintos autovalores son linealmente independientes

Matrices Semejantes

Matrices semejantes tienen los mismos autovalores.
Observación. En efecto, si dos matrices semejantes, es porque representan el mismo operador lineal, sólo que la matriz asociada está escrita para diferentes bases.
Recordemos que si dos matrices son semejanes, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$

Definición. Matriz Diagonalizable

Un operador lineal se dice diagonalizable si admite una base de autovectores.
Observación. En la base de autovectores, la matriz del operador es diagonal.

Ejemplo

Ejemplo

Consideremos la matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ La solución de la ecuación característica es $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$. Para obtener las coordenadas de los autovectores hacemos, para el primer autovalor $\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 4-1 & 2 \\ 3 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ La solución para el primer caso es
$3\, v_1^1 + 2\, v_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad v_1^2 = -\frac{3}{2} v_1^1$ Entonces, si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es la base del espacio con la que se construyó la matriz del operador, el subespacio propio asociado al autovalor λ_1 es

$$S_{\lambda_1} = \overline{\{\mathbf{e}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{e}_2\}} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad S_{\lambda_1} = \overline{\{2\,\mathbf{e}_1 - 3\,\mathbf{e}_2\}}$$

Análogamente, para el autovalor $\lambda_2 = 6$