Matemática Avanzada

Clase Nro. 6

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Espacios Producto Interno. Espacios Euclídeos

Definición

Dado un espacio vectorial V sobre el cuerpo de los números reales. Una operación $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ es un producto interno siempre y cuando se satisfagan las siguientes propiedades

- $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ es un número real
- $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$ (conmutatividad sólo para espacios sobre los reales)
- $\langle \lambda \, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 | \vec{v} \rangle = \lambda \, \langle \vec{u}_1 | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}_2 | \vec{v} \rangle$
- $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle > 0 \quad \forall \vec{v} \neq \vec{0}, \qquad \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Observación

El Producto interno puede definirse de muchas maneras, siempre que satisfaga las condiciones

Ejemplos

Ejemplo 1. El producto escalar en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ el producto interno definido a través de

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

satisface todas las propiedades de producto interno

Ejemplo 2. El producto interno en el espacio de funciones

Consideremos el espacio de funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Un producto interno en este espacio está definido a partir de

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

Producto interno en espacios complejos

Para espacios sobre los complejos

Si el espacio vectorial está definido sobre el cuerpo los complejos, los axiomas son

- $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ es un número complejo
- $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v} | \vec{u} \rangle}$
- $\langle \lambda \, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 | \vec{v} \rangle = \lambda \, \langle \vec{u}_1 | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}_2 | \vec{v} \rangle$
- $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle > 0 \quad \forall \vec{v} \neq \vec{0}, \qquad \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \; \leftrightarrow \; \vec{v} = \vec{0}$

Observación

$$\langle \vec{v} | \lambda \vec{w} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$$

En complejos, el producto interno no es estrictamente una forma bilineal

Norma o módulo de un vector

Definición

Una vez definido un producto interno, podemos definir la *norma* de un vector de un espacio vectorial $\vec{v}$ como

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle} \quad \text{o} \quad ||\vec{v}||^2 = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$$

Teorema

Si V es un espacio producto interno se cumple

- $||\lambda \, \vec{v}|| \, = \, |\lambda| \, ||\vec{v}||$
- $||\vec{v}|| > 0, \qquad \textit{para } \vec{v} \neq \vec{0}$
- $|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle| \leq ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$ *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*
- $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ *Desigualdad triangular*

La Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Las demostraciones de los dos primeros puntos son inmediatas a partir de la definición de producto interno, y se deja como ejercicio. Para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz consideremos el vector

$$\vec{w} = \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}|\vec{v} \rangle}{||\vec{v}||^2}\,\vec{v}$$

Si calculamos el cuadrado de la norma del vector $\vec{w}$ es un número positivo. Entonces,

$$0 \leq ||\vec{w}||^2 = \langle \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}|\vec{v} \rangle}{||\vec{v}||^2}\,\vec{v}|\vec{u} - \frac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||^2}\,\vec{v}\rangle$$

Haciendo las cuentas, se obtiene la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

La desigualdad triangular

Calculemos ahora $||\vec{u}+\vec{v}||^2$. Tenemos que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}|\vec{u}+\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle + \langle \vec{v}|\vec{v}\rangle + 2\,\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle$$

Pero además, tenemos $\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle \leq |\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$, con lo que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 \leq \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle + \langle \vec{v}|\vec{v}\rangle + 2\,||\vec{u}||\,||\vec{v}|| = (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2$$

De donde se obtiene la *desigualdad triangular*.

Espacios Normados

En algunos casos, es posible definir una norma de vectores sin necesidad de tener definido un producto interno. En ese caso, decimos que el espacio es un **espacio normado**.

Ortogonalidad

Definición

Sea V un espacio producto interno. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de V. Se dice que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0$$

Propiedad: Ortogonalidad implica Independencia Lineal

Un conjunto ortogonal es linealmente independiente. La demostración es inmediata.

Consecuencia

Dado un espacio vectorial euclideo, tendremos una base ortogonal!

Construcción de una base ortogonal

Partimos de una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ y vamos a construir una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ ortogonal, mediante el procedimiento

Procedimiento. Proceso de Gram-Schmidt

El algoritmo de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_2 | \vec{v}_1 \rangle}{||\vec{v}_1||^2}\,\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{\langle \vec{u}_3 | \vec{v}_1 \rangle}{||\vec{v}_1||^2}\,\vec{v}_1 - \frac{\langle \vec{u}_3 | \vec{v}_2 \rangle}{||\vec{v}_2||^2}\,\vec{v}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\vec{v}_m &= \vec{u}_m - \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{\langle \vec{u}_m | \vec{v}_\ell \rangle}{||\vec{v}_\ell||^2}\,\vec{v}_\ell
\end{aligned}$$

Base Ortogonal. Coeficientes de Fourier

Consideremos un espacio vectorial real de dimensión n. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ una base ortogonal. Sea $\vec{v} \in V$, entonces

$$\vec{v} = v^{\mu}\, \mathbf{e}_{\mu}$$

Calculemos $\langle \vec{v} | \mathbf{e}_{\nu} \rangle$ Calculando el producto, tenemos

$$\langle \vec{v} | \mathbf{e}_{\nu} \rangle = \langle v^{\mu}\, \mathbf{e}_{\mu} | \mathbf{e}_{\nu} \rangle = v^{\mu} \langle \mathbf{e}_{\mu} | \mathbf{e}_{\nu} \rangle = v^{\nu} ||\mathbf{e}_{\nu}||^2$$

Entonces, las coordenadas las obtenemos calculando

$$v^{\nu} = \frac{\langle \vec{v} | \mathbf{e}_{\nu} \rangle}{||\mathbf{e}_{\nu}||^2}$$

Entonces, la expresión del vector es

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{v} | \mathbf{e}_{\mu} \rangle}{||\mathbf{e}_{\mu}||^2}\, \mathbf{e}_{\mu}$$

El producto interno como un tensor. El tensor métrico

Consideremos un espacio vectorial real. Entonces, el producto interno es una forma bilineal. Entonces, es un tensor dos veces covariante.

Definición

Vamos a definir el tensor dos veces covariante $\mathbf{g} : V \times V \to \mathbb{R}$ a través de

$$\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle$$

Este tensor se lo denomina *tensor métrico* y sos coordenadas se calculan como ya hemos visto, aplicando el tensor en los vectores base

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \langle \mathbf{e}_\mu \,|\, \mathbf{e}_\nu \rangle$$

1-forma asociada a un vector. Vectores Covariantes

Notemos que si fijamos un vector, digamos, $\vec{v}$, la aplicación $f_{\vec{v}} : V \to \mathbb{R}$, definida a través de

$$f_{\vec{v}}(\vec{w}) = \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle$$

Aplicando a los elementos de la base del espacio, obtendremos las coordenadas de este tensor

$$f_{\vec{v}}(\mathbf{e}_\mu) = \langle \vec{v} \,|\, \mathbf{e}_\mu \rangle = v^\nu \langle \mathbf{e}_\nu \,|\, \mathbf{e}_\mu \rangle = v^\nu g_{\mu\nu}$$

Definición. Coordenadas Covariantes de un vector contravariante

Dado un vector contravariante $\vec{v}$ de coordenadas v^μ definimos las coordenadas covariantes como

$$v_\nu = g_{\mu\nu} v^\mu$$

Subida y bajada de índices

A partir de las coordenadas del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ definamos $g^{\alpha\beta}$ a través de

$$g^{\alpha\mu}\, g_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}_{\nu} = \begin{cases} 1 & \alpha = \nu \\ 0 & \alpha \neq \nu \end{cases} \quad \text{visto como matriz, la inversa}$$

Esto nos permite cambiar la naturaleza de los tensores, pasando varianzas a contravarianzas multiplicando convenientemente por $g_{\mu\nu}$ o $g^{\mu\nu}$

Ejemplos

- $x_{\mu} = g_{\nu\mu} x^{\nu}$ coordenada covariante de un vector contravariante
- $f^{\nu} = g^{\mu\nu} f_{\mu}$ coordenada contravariante de una coordenada covariante de una forma