

Matemática Avanzada

Clase Nro. 5

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Cambio de bases en tensores

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 5

Octavio
Miloni

Supongamos que en la base del espacio y del dual se efectúan los cambios de base

$$\mathbf{e}'_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} \mathbf{e}_{\nu}, \quad d\mathbf{x}'^{\mu} = [\Lambda^{-1}]_{\nu}^{\mu} d\mathbf{x}^{\nu}$$

Y el consecuente cambio en las coordenadas de vectores y 1-formas

$$x'^{\mu} = [\Lambda^{-1}]_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad f'_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} f_{\mu}$$

Pregunta

Cómo quedará el cambio de coordenadas en tensores en general?

Tensores dos veces covariantes

Los tensores dos veces covariantes son objetos de la forma:

$$\mathbf{T} = T_{\mu\nu} (\mathbf{dx}^\mu \otimes \mathbf{dx}^\nu)$$

Y esta representación es invariante, lo que implica que se puede escribir

$$\mathbf{T} = T_{\mu\nu} (\mathbf{dx}^\mu \otimes \mathbf{dx}^\nu) = T'_{\alpha\beta} (\mathbf{dx}'^\alpha \otimes \mathbf{dx}'^\beta)$$

Dado un cambio de base (para el espacio y para el dual)

$$\mathbf{e}'_\nu = \Lambda_\nu^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{dx}'^\mu = [\Lambda^{-1}]^\mu_\nu \mathbf{dx}^\nu$$

Al reemplazar obtenemos

Cambio de coordenadas en un tensor dos veces covariante

$$T'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$$

Tensoros dos veces contravariantes

Los tensores dos veces contravariantes son objetos de la forma:

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu} (\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu)$$

Y esta representación es invariante, lo que implica que se puede escribir

$$\mathbf{T} = T^{\mu\nu} (\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu) = T'^{\alpha\beta} (\mathbf{e}'_\alpha \otimes \mathbf{e}'_\beta)$$

Dado un cambio de base (para el espacio y para el dual)

$$\mathbf{e}'_\nu = \Lambda^\mu_\nu \mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{dx}'^\mu = [\Lambda^{-1}]^\mu_\nu \mathbf{dx}^\nu$$

Al reemplazar obtenemos

Cambio de coordenadas en un tensor dos veces contravariante

$$T'^{\mu\nu} = [\Lambda^{-1}]^\mu_\alpha [\Lambda^{-1}]^\nu_\beta T^{\alpha\beta}$$

Tensores una vez covariante y una vez contravariante

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 5

Octavio
Miloni

Definición

Los tensores una vez covariante y una vez contravariante, o del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son objetos

$$\mathbf{T} = V \times V^* \rightarrow \mathbb{R} \in V^* \otimes V, \quad \text{bilineal}$$

Cuya representación invariante es

$$\mathbf{T} = T_{\nu}^{\mu} (\mathbf{dx}^{\nu} \otimes \mathbf{e}_{\mu})$$

Cambio de coordenadas

De manera análoga a los casos anteriores, obtenemos

$$T'_{\nu}{}^{\mu} = [\Lambda^{-1}]_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\beta} T_{\beta}^{\alpha}$$

Tensores del tipo $\binom{p}{q}$

Con las ideas que ya hemos desarrollado, consideremos una forma $(p + q)$ -lineal que tome p elementos de V , q elementos de V^* y que le asigne un elemento de \mathbb{R}

Esto es

$$\mathbf{T} : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p\text{-veces}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{q\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Representación

Como combinación de la base del espacio

$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p\text{-veces}} \times \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q\text{-veces}}$ estos objetos se

escriben

$$\mathbf{T} = T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} (\mathbf{dx}^{\nu_1} \otimes \mathbf{dx}^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{dx}^{\nu_p} \otimes \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \mathbf{e}_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mu_q})$$

Cambio de coordenadas

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 5

Octavio
Miloni

Cambio de coordenadas para tensores en general

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} = \Lambda^{\alpha_1}_{\nu_1} \Lambda^{\alpha_2}_{\nu_2} \dots \Lambda^{\alpha_p}_{\nu_p} [\Lambda^{-1}]^{\mu_1}_{\beta_1} [\Lambda^{-1}]^{\mu_2}_{\beta_2} \dots [\Lambda^{-1}]^{\mu_q}_{\beta_q} T^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$$

Regla mnemotécnica para el cambio de coordenadas

Supongamos un tensor del tipo $\binom{p}{q}$, es decir, p -veces covariante y q -veces contravariante

- Por cada índice covariante $[\]_{\mu_\ell}$ el cambio contiene un múltiplo $\Lambda^{\beta_\ell}_{\mu_\ell}$
- Por cada índice contravariante $[]^{\nu_s}$ el cambio contiene un múltiplo $[\Lambda^{-1}]^{\nu_s}_{\alpha_s}$

Ejemplo de cambio de coordenadas

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 5

Octavio
Miloni

Ejemplo

Consideremos un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2*} \rightarrow \mathbb{R}$, en la base para V , $\{(-1, 1); (0, -1)\}$ y su correspondiente dual tiene por coordenadas $T_1^1 = 5$, $T_2^1 = 2$, $T_1^2 = 1$, $T_2^2 = 3$, Hallar las coordenadas del tensor si la base para V es $\{(1, 0); (1, 1)\}$

Respuesta. Con las bases nuevas y viejas, podemos encontrar la matriz $\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. con su inversa $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tenemos todo lo necesario para obtener las nuevas coordenadas del tensor $T'_\nu{}^\mu = [\Lambda^{-1}]_\alpha{}^\mu \Lambda_\nu{}^\beta T_\beta{}^\alpha$, $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2$
Recordar: Superíndice son filas y subíndices, columnas (para las matrices $\mathbf{\Lambda}$ y $\mathbf{\Lambda}^{-1}$)