

Matemática Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Espacio Dual

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio
Miloni

Ejemplo 1

Considerar la base dual para \mathbb{R}^3 , $\{\mathbf{dx}^1, \mathbf{dx}^2, \mathbf{dx}^3\}$ definidas como

$$\mathbf{dx}^1(x, y, z) = 2x - y + z$$

$$\mathbf{dx}^2(x, y, z) = x - 2y + 3z$$

$$\mathbf{dx}^3(x, y, z) = -x + y - z$$

Hallar

- La base de \mathbb{R}^3
- Las coordenadas del vector $(6, 7, 8)$
- Las coordenadas de la funcional lineal $f(x, y, z) = x + y + z$

Cambio de base y coordenadas

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio
Miloni

Consideremos un cambio de base en el espacio vectorial V . Esto implica que tenemos un cambio definido a través de la relación

$$\mathbf{e}'_\nu = \Lambda_\nu^\mu \mathbf{e}_\mu$$

Ahora, dado un elemento de V^* este se representa de manera invariante

$$f_\mu \mathbf{dx}^\mu = f'_\nu \mathbf{dx}'^\nu$$

Aplicando a ambos miembros la funcional a un vector $\vec{v} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha = x'^\beta \mathbf{e}'_\beta$, se obtiene

$$f'_\mu = \Lambda_\mu^\nu f_\nu \quad \text{cambio de coord. de funcionales}$$

y para el cambio de base se puede obtener

$$\mathbf{dx}'^\mu = [\Lambda^{-1}]^\mu_\nu \mathbf{dx}^\nu$$

Cambio de base y coordenadas

Resumen de cambios

Resumen de cambio de base y coordenadas

Espacio	Base	Coordenadas
Espacio V	$\mathbf{e}'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \mathbf{e}_{\nu}$	$x'^{\mu} = [\Lambda^{-1}]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Espacio V^*	$\mathbf{dx}'^{\mu} = [\Lambda^{-1}]^{\mu}_{\nu} \mathbf{dx}^{\nu}$	$f'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} f_{\nu}$

Recordar que la representación con subíndices y supraíndice tenemos

- El supraíndice indica fila
- El subíndice indica columna

Covarianza y contravarianza

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio
Miloni

Coordenadas Contravariantes

Hemos visto que un vector lo denotamos

$$\vec{v} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$$

las coordenadas x^μ las denominamos coordenadas *contravariantes* y aparecen siempre en los supraíndices.

Coordenadas Covariantes

Las funcionales lineales, elementos del espacio dual las denotamos

$$f = f_\mu \mathbf{dx}^\mu$$

las coordenadas f_μ las denominamos coordenadas *covariantes* y aparecen siempre en los subíndices.

El gradiente de un campo escalar

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio
Miloni

Consideremos una función diferenciable en (x_0, y_0, z_0)
 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z).$

Por definición de diferenciabilidad, en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ se puede escribir

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(P) u_x + \frac{\partial f}{\partial y}(P) u_y + \frac{\partial f}{\partial z}(P) u_z}_{df(P)} + \varepsilon \|\vec{u}\|$$

Entonces, la diferencial

$$df(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) u_x + \frac{\partial f}{\partial y}(P) u_y + \frac{\partial f}{\partial z}(P) u_z$$

es un funcional lineal, cuyas componentes $\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(P)$ es el gradiente de la función.

Formas bilineales

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio
Miloni

Formas bilineales

Una forma bilineal sobre un espacio V es una aplicación $F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple

- $f(\vec{u}; \lambda \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda f(\vec{u}; \vec{v}_1) + f(\vec{u}; \vec{v}_2)$
- $f(\lambda \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_2; \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}_1; \vec{v}) + f(\vec{u}_2; \vec{v})$

Observación

Podemos notar que, dado un espacio vectorial V y su dual V^* una forma bilineal puede ser obtenida de la siguiente manera: Sean f y g dos elementos del espacio dual V^* . Entonces,

$$F(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{u}) \cdot g(\vec{v})$$

(donde notemos que el producto se realiza en \mathbb{R}) es una forma bilineal.

Ejemplo

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio
Miloni

Consideremos, como ejemplo, la forma bilineal sobre \mathbb{R}^2

$$F(\vec{u}; \vec{v}) = 2u_x v_x - 4u_x v_y + u_y v_x - 2u_y v_y$$

puede escribirse como

$$F(\vec{u}; \vec{v}) = f(\vec{u}) \cdot g(\vec{v})$$

donde

$$f(\vec{u}) = 2u_x + u_y, \quad g(\vec{v}) = v_x - 2v_y$$

Veamos que esto no es una particularidad, sino que cualquier forma bilineal puede ser escrita como "producto" de dos 1-formas. El encomillado viene de que lo que se ve como producto es la aplicación en los vectores, pero no sabemos que es producto de 1-formas.

Formas Multilineales

Matemática
Avanzada

Clase Nro. 3

Octavio
Miloni

La extensión de una forma bilineal a una multilineal es elemental: Una forma multilineal sobre V es una aplicación $F : V \times V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que se puede explicitar como

$$F(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$$

lineal en cada argumento.

Más aún, una forma de construir una forma m -lineal es a partir de m elementos del espacio dual, f_1, f_2, \dots, f_m y definir

$$F(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = f_1(\vec{v}_1) \cdot f_2(\vec{v}_2) \cdots f_m(\vec{v}_m)$$