Matemática Avanzada

Clase Nro. 22

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Aplicaciones a la Física Matemática
Teoria del Potencial

- Problema de Contorno en el Espacio
- Identidades de Green
- Condición de Dirichlet
- Condición de Neumann

Problema de Contorno en el Espacio

1. El problema de Sturm-Liouville puede ser extendido a problemas de contorno en el plano y en el espacio.

2. Las ideas y propiedades relacionadas a la función de Green pueden ser extendidas a $\mathcal{R}^2$ y $\mathcal{R}^3$

3. Análogamente a los visto para un problema unidimensional, la solución de un problema inhomogéneo será construída a partir de la función de Green.

4. En un problema espacial, vamos a considerar una superficie cerrada $S = \partial V$ frontera de un volumen V

5. Con este análisis, haremos un estudio del potencial gravitatorio para el caso espacial, teniendo en cuenta volumen acotado y el problema infinito.

Para tratar las condiciones de contorno en el problema del potencial, vamos a considerar un procedimiento desarrollado por **George Green**. Este procedimiento consiste en aplicar el conocido Teorema de Gauss

$$\iiint_V Div(\vec{F})\, dv = \iint_{\partial V} \langle \vec{F} | \vec{n} \rangle \, dS$$

donde ∂V es la superficie frontera del volumen V y $\vec{n}$ el vector normal exterior.
Si elegimos dos campos escalares Φ y Ψ de tal manera que definimos el campo $\vec{F}$ a partir de la relación $\vec{F} = \Phi \, \nabla\Psi$ tenemos que

$$Div(\Phi \, \nabla\Psi) = \Phi\nabla^2\Psi + \langle \nabla\Phi | \nabla\Psi \rangle$$

Reemplazando en la integral, tenemos la primera identidad de Green

$$\iiint_V \left[\Phi\nabla^2\Psi + \langle \nabla\Phi | \nabla\Psi \rangle \right] \, dv = \iint_{\partial V} \Phi \, \langle \nabla\Psi | \vec{n} \rangle \, dS = \iint_{\partial V} \Phi \, \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} \, dS$$

Las Identidades de Green (*Continuación*)

Si a partir de la primera identidad de Green

$$\iiint_V \left[\Phi\nabla^2\Psi + \langle\nabla\Phi|\nabla\Psi\rangle\right] dv = \iint_{\partial V} \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}} dS$$

Intercambiamos Φ con Ψ y restamos obtenemos la segunda identidad de Green

$$\iiint_V \left[\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi\right] dv = \iint_{\partial V} \left[\Phi \frac{\partial\Psi}{\partial\vec{n}} - \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}\right] dS$$

Para aplicar las identidades de Green al problema del potencial, tengamos en cuenta que

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'})$$

Esta identidad se obtiene directamente a partir de aplicar el Teorema de Gauss

$$\iiint_V \nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right] dv = \iiint_V Div \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right] dv = \iint_{\partial V} \langle\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}|\vec{n}\rangle\, ds = \iint_{\partial V} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\right] r^2 ds = -4\pi$$

Aplicación de las Identidades de Green. Ecuación de Poisson.

Si aplicamos la segunda identidad de Green en la que para la función Φ sea el potencial gravitatorio y la función

$$\Psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Además, si consideramos que el potencial gravitatorio debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Tenemos

$$\iiint_V \left[\Phi(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'})) - \frac{4\pi G}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \rho(\vec{r'}) \right] dv' = \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n'}} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

Entonces, calculando la primera integral

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial \vec{n'}} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

A partir de la propiedad

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'})$$

vemos que esta función cumple con la condición fundamental para ser función de Green. Más aún, si consideramos una función armónica adicional, también satisface la ecuación, con lo que podemos construir una función de Green de la forma

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} + F(\vec{r}, \vec{r'}) \qquad (\nabla^2 F = 0)$$

Entonces, sustituyendo en la fórmula de Green para la función $\Phi(\vec{r})$
Entonces, calculando la primera integral

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G(\vec{r}, \vec{r'}) dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial \vec{n'}} - G(\vec{r}, \vec{r'}) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

Condición de Dirichlet

De la expresión

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G(\vec{r}, \vec{r'}) dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left\{ \Phi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial \vec{n'}} - G(\vec{r}, \vec{r'}) \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n'}} \right\} dS$$

si imponemos la condición de Dirichlet

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = 0 \qquad \vec{r'} \in S$$

la solución será

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G_D(\vec{r}, \vec{r'}) dv' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \Phi \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial \vec{n'}} dS$$

Condición de Neumann

Para la imposición de la condición de Neumann, debemos tener cuidado porque poner sencillamente $\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r'})}{\partial \vec{n'}} = 0$ nos podría traer confusión, ya que por aplicación directa del Teorema de Gauss

$$\iint_{\partial V} \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r'})}{\partial \vec{n'}}\, dS = -4\pi$$

Por lo tanto, la condición más sencilla que podemos imponer para el problema de Neumann es

$$\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r'})}{\partial \vec{n'}} = -\frac{4\pi}{S} \qquad (\vec{r'} \in S)$$

donde S es el valor del área de la superficie S

Con esto, la solución a la Ecuación de Poisson con la condición de Neumann para Φ será, llamando $\langle\Phi\rangle_S$ al valor medio del potencial sobre la superficie

$$\Phi(\vec{r}) = \langle\Phi\rangle_S - G\iiint_V \rho(\vec{r'})G(\vec{r},\vec{r'})dv' + \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial V} G_N(\vec{r},\vec{r'})\frac{\partial\Phi}{\partial \vec{n'}}\, dS$$

Aplicaciones a la Física Matemática
Teoria del Potencial II: Desarrollo Multipolar

- El Laplaciano en Coordenadas Esféricas
- Armónicos Esféricos
- Aplicación a la Teoría del Potencial Gravitatorio
- Desarrollo Multipolar del Potencial Gravitatorio

El Laplaciano de un campo escalar definido en $\mathcal{R}^3$, $\Phi(x, y, z)$, es

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Si cambiamos las coordenadas a esféricas

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y &= r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\varphi) \end{aligned}$$

El Laplaciano toma la forma:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right] + \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi\right] + \frac{1}{r^2\sin^2(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right]$$

Si la función $\Phi(r,\theta,\varphi)$ es separable en la forma

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$$

El Laplaciano toma la forma

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= Y(\theta,\varphi)\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \\ &+ R(r)\,\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}\right]\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{R(r)Y(\theta,\varphi)}\nabla^2\Phi = \frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \\ + \frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\left[\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right] + \frac{1}{\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}\right]\end{aligned}$$

La ecuación de Laplace es $\nabla^2\Phi = 0$

Considerando que las variables son separables en el sentido presentado, tenemos que la ecuación de Laplace en esféricas la podemos escribir

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right]+\frac{1}{\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}\right]=0$$

o bien

$$\underbrace{-\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]}_{\text{sólo depende de } r}=\underbrace{\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right]+\frac{1}{\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}\right]}_{\text{sólo depende de } \theta \text{ y } \varphi}$$

Para que esto ocurra, se debe cumplir

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] &= -C\\ \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right]+\frac{1}{\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}\right] &= C\end{aligned}$$

La parte radial de la ecuación es

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + C\, R = 0 \qquad \text{(Ecuación de Euler!!!!)}$$

Proponiento una serie de potencias de $R = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell$ llegamos a

$$\sum a_\ell \left[\ell(\ell-1) + 2\ell + C\right] r^{\ell-2} = 0$$

Entonces, C es

$$C = -\ell\,(\ell+1)$$

Entonces, la solución general será

$$\phi = A\, \frac{1}{r^{\ell+1}}\, Y + B\, r^\ell\, Y$$

Con este valor de C vamos a la ecuación para $Y(\theta, \varphi)$

La ecuación en θ y φ

Para la función $Y(\theta,\varphi)$ la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right]+\frac{1}{\sin^2(\varphi)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\ell(\ell+1)\,Y(\theta,\varphi)=0$$

Si efectuamos el cambio de coordenadas $\xi=\cos(\varphi)$ tendremos que las derivadas las podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} &= -\sin(\varphi)\frac{\partial Y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} &= -\cos(\varphi)\frac{\partial Y}{\partial\xi}+\sin^2(\varphi)\frac{\partial^2 Y}{\partial\xi^2}\end{aligned}$$

La ecuación en θ y φ (*continuación*)

Reemplazando en la ecuación para los ángulos tenemos

$$\underbrace{(1-\xi^2)\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} - 2\xi\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \ell(\ell+1)\,Y}_{\text{Ecuación de Legendre!}} + \frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} = 0$$

Si proponemos $Y = Y_1(\xi)\,e^{im\theta}$ con $m \in \mathcal{Z}$ y reemplazamos en la ecuación, tenemos

$$\left\{(1-\xi^2)\frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} - 2\xi\frac{\partial Y_1}{\partial \xi} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right] Y_1\right\} e^{im\theta} = 0$$

que es satisfecha por la función solución de

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} - 2\xi\frac{\partial Y_1}{\partial \xi} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right] Y_1 = 0$$

que es la Ecuación Asociada de Legendre

Propiedades de las Funciones asociadas de Legendre

Las funciones P_ℓ^m satisfacen la ecuación diferencial

$$(1-\xi^2)\frac{d^2 P_\ell^m(\xi)}{d\xi} - 2\xi\frac{dP_\ell^m(\xi)}{d\xi} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right] P_\ell^m(\xi) = 0$$

1. Ortogonalidad. En $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(t)\, P_{\ell'}^m(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \ell \neq \ell' \\ \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} & \ell = \ell' \end{cases}$$

2. Fórmula de Rodrigues. Los $P_\ell^m(\xi)$ se pueden calcular a partir de

$$P_\ell^m(\xi) = (-1)^m(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\ \frac{d^m}{d\xi^m}\left[P_\ell(\xi)\right] = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\ \frac{d^{\ell+m}}{d\xi^{\ell+m}}(\xi^2-1)^\ell$$

Propiedades de las Funciones asociadas de Legendre (*Continuación*)

Las condiciones de periodicidad y regularidad en el polo norte y sur de la esfera hacen que el índice ℓ y el orden m necesarios para que se satisfagan deben ser y cumplir: $\ell \geq 0$ y $|m| \leq \ell$, es decir $-\ell \leq m \leq \ell$.
Consideremos los m positivos:

$$P_\ell^m(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}} \; \frac{d^m}{d\xi^m} \left[P_\ell(\xi)\right]$$

Para tomar en cuenta los negativos, tendremos

$$P_\ell^{-m}(\xi) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\xi) \qquad\qquad m > 0$$

Armónicos Esféricos

La parte angular de la solución de la ecuación de Laplace tendrá como expresión

$$P_\ell^m(\xi)e^{i\,m\,\theta}$$

Si definimos sobre la superficie de una esfera unidad el producto interno

$$\langle f|g\rangle = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} f(\theta,\varphi)\,g^*(\theta,\varphi)\;\underbrace{\sin(\varphi)d\varphi\,d\theta}_{\text{ángulo sólido } d^2\Omega}$$

junto con la relación de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre, tendremos

$$\langle P_\ell^m(\xi)e^{i\,m\,\theta}|P_\ell^{m'}(\xi)e^{i\,m'\,\theta}\rangle = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\,\ell'}\delta_{m\,m'}$$

Con todo lo visto, se define los **Armónicos Esféricos** , $Y_{\ell\, m}(\theta, \varphi)$

$$Y_{\ell\, m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}}\, P_\ell^{|m|}(\cos\varphi)\, e^{i\, m\, \theta} \times \begin{cases} (-1)^m & m \geq 0 \\ 1 & m < 0 \end{cases}$$

Entonces, la solución general a la ecuación $\nabla^2 \Phi = 0$ será, por el principio de superposición

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[A^{\ell m} \frac{1}{r^{\ell+1}} + B^{\ell m}\, r^{\ell} \right] Y_{\ell\, m}(\theta, \varphi)$$

Tabla para los Primeros de Armónicos Esféricos $Y_{\ell\, m}(\theta, \varphi)$

A partir de la definición tenemos

$$\ell = 0 : \; Y_{00} = \frac{1}{4\pi}$$

$$\ell = 1 : \; \begin{cases} Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \, \sin(\varphi)\, e^{-i\theta} \\ \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \, \cos(\varphi) \\ \\ Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \, \sin(\varphi)\, e^{i\theta} \end{cases}$$

$$\ell = 2 : \; \begin{cases} Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \, \sin^2(\varphi)\, e^{-2i\theta} \\ \\ Y_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \, \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{-i\theta} \\ \\ Y_{2\,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \, \left[\frac{3}{2} \cos^2(\varphi) - \frac{1}{2}\right] \\ \\ Y_{2\,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \, \sin(\varphi) \cos(\varphi) e^{i\theta} \\ \\ Y_{2\,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \, \sin^2(\varphi)\, e^{2i\theta} \end{cases}$$

Y así sucesivamente

Teorema de Adición de Armónicos Esféricos

Un resultado de gran aplicación en Teoría del Potencial es el denominado Teorema de Adición de Armónicos Esféricos. Si dos radios vectores forman entre sí un ángulo γ ($\cos(\gamma) = \frac{\langle \vec{r} | \vec{r'} \rangle}{|\vec{r}|\,|\vec{r'}|}$) se tiene

$$P_\ell(\cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell\,m}(\theta,\varphi)\, Y^*_{\ell\,m}(\theta',\varphi')$$

donde

$$\cos(\gamma) = \cos(\varphi)\cos(\varphi') + \sin(\varphi)\sin(\varphi')\cos(\theta-\theta')$$

Recordemos además que los polinomios de Legendre pueden ser obtenidos a partir de la función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2x\,t}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)\, t^\ell$$

La función de Green para la Esfera

Consideremos la función

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\, r\, r' \cos(\gamma)}}$$

con $r = |\vec{r}|$, $r' = |\vec{r'}|$

Supongamos que separamos el problema en interior ($r < r'$) y exterior ($r > r'$)

Para hacer el desarrollo en polinomios de Legendre es necesario distinguir los problemas, ya que el cociente r/r' o r'/r debe ser menor a uno para que sea convergente.

Entonces, para $r > r'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\, r\, r' \cos(\gamma)}} \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1 + t^2 - 2t\, \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos(\gamma))\, \frac{1}{r^{\ell+1}}\, r'^{\ell} \end{aligned}$$

La función de Green para la Esfera (*continuación*)

y para $r < r'$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\, r\, r' \cos(\gamma)}} \\ &= \frac{1}{r' \sqrt{1 + t^2 - 2t\, \cos(\gamma)}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos(\gamma))\, \frac{1}{r'^{\ell+1}}\, r^\ell \end{aligned}$$

Sólo resta aplicar ahora el Teorema de Adición de Armónicos Esféricos y completamos la descripcion en coordenadas esféricas

Teorema de Adición de Armónicos Esféricos

Aplicando el teorema de Adición, tenemos

- Para $r' < r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos(\gamma))\,\frac{1}{r^{\ell+1}}\,r'^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{1}{r^{\ell+1}}\,r'^{\ell}\,Y_{\ell\,m}(\theta,\varphi)\,Y^*_{\ell\,m}(\theta',\varphi')\end{aligned}$$

- Para $r' > r$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos(\gamma))\,\frac{1}{r'^{\ell+1}}\,r^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{1}{r'^{\ell+1}}\,r^{\ell}\,Y_{\ell\,m}(\theta,\varphi)\,Y^*_{\ell\,m}(\theta',\varphi')\end{aligned}$$

Desarrollo Multipolar del Potencial Gravitatorio. Alcance Infinito

Apliquemos el Teorema de Adición de Armónicos Esféricos al *Problema Gravitatorio* de alcance infinito (entonces con la imposición de que debe ser nulo el potencial en el infinito y el campo ($\nabla\Phi = 0$) en el infinito, la segunda identidad de Green se reduce a

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) G(\vec{r}, \vec{r'}) dv' = -G \iiint_V \rho(\vec{r'}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dv'$$

Ahora, la integral se calcula en todo $\mathcal{R}^3$

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int_0^\infty \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \rho(\vec{r'}) \rho(\vec{r'}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} r'^2 \sin(\varphi) dr' d\theta' d\varphi'$$

La integral en r' la separamos en $0 \leq r' < r$ y en $r \leq r' < \infty$

Realizando la separación de la integral en r' y considerando el teorema de adición de armónicos esféricos (tendiendo en cuenta los valores relativos de r y r') llegamos a la expresión del desarrollo multipolar

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) \quad = \quad & -4\pi G \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{l\,m}(\theta,\varphi)}{2l+1} \left\{ \frac{1}{r^{\ell+1}} \int_0^r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} Y^*_{l\,m}(\theta',\varphi')\rho(\vec{r'}){r'}^{\ell+2} \underbrace{\sin(\varphi')\, d\varphi\, d\theta}_{d^2\Omega \text{ (ángulo sólido)}} \right. \\
& \left. + \, r^{\ell} \int_r^{\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} Y^*_{l\,m}(\theta',\varphi')\rho(\vec{r'}){r'}^{-\ell+1} \underbrace{\sin(\varphi')\, d\varphi d\theta}_{d^2\Omega \text{ (ángulo sólido)}} \right\}
\end{aligned}
$$

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kellog, Oliver D. *Foundations of Potential Theory*. Ed. Dover (1953)
- Webster, Arthur G. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Dover (1955)
- Jackson, John D. Electrodinámica Clásica. Ed. Alhambra. (1966)
- Sobolev, Sergei. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Ed. Addison Wesley (1964)