Matemática Avanzada

Clase Nro. 21

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

El Problema de Sturm-Liouville
El Caso Homogéneo

- Formulación del problema
- Tipos de Condiciones de Contorno
- Carácter Autoadjunto del Operador de Sturm-Liouville

El abordaje de las ecuaciones diferenciales que hasta ahora hemos analizado fue en el sentido de **Problema de Valor Inicial** o **Problema de Cauchy**

En virtud de la teoría desarrollada, para una ecuación lineal de segundo orden eran necesarios los valores de la función y de la derivada en un valor inicial.

El **Problema de Sturm-Liouville** será una ecuación diferencial de segundo orden definida en un intervalo cerrado (y que pueda ser escrita en determinada manera), para la cual las condiciones se fijan los valores en los extremos del intervalo, tanto el valor de la función como el de la derivada.

Formulación

Una ecuación diferencial de segundo orden

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = \lambda\, y(x)$$

definida en un intervalo $[a, b]$ se dice que es de Sturm-Liouville si puede escribirse como

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] y(x) + q(x)y(x) = \lambda\, r(x)\, y(x)$$

donde las funciones $p(x)$ y $r(x)$ son positivas en el intervalo

Tipos de Condiciones de Contorno

En general, las condiciones de contorno para el problema de Sturm-Liouville pueden ser de dos tipo:

- Condiciones Locales o Separadas: Son aquellas que fijan valores de la función y de la derivada en cada extremo del intervalo
- Condiciones No Locales: Son aquellas que relacionan los valores de la función y de la derivada en cada extremo del intervalo

Tipos de Condiciones Locales o Separadas

Los tipos de Condiciones Locales:

- Dirichlet:

$$\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

- Newmann:

$$\begin{cases} y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

- Nicoletti:

$$\begin{cases} y'(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases} \qquad o \qquad \begin{cases} y(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{cases}$$

Carácter Autoadjunto del Operador de Sturm-Liouville

Definimos como **Operador de Sturm-Liouville** al operador lineal:

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

Con esta definición, la ecuación diferencial que queremos resolver se puede escribir

$$L[y] = \lambda r(x)\, y$$

Que es (casi) un problema de autovalores (casi por el factor $r(x)$
Para el producto interno en $[a, b]$

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

para las condiciones de contorno que hemos definido el **operador** es **Hermítico** o **autoadjunto**

El Operador es Autoadjunto

Calculemos

$$\langle L[f]|g\rangle = \int_a^b L[f(t)]\, g(t)\, dt = \int_a^b \left[-\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{df(t)}{dt}\right] + q(t)\, f(t)\right]\, g(t)\, dt$$

Calculemos mediante integración por partes la integral

$$-\int_a^b \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{df(t)}{dt}\right]\, g(t)\, dt = -\, p(t)\frac{df(t)}{dt}\, g(t)\Big|_a^b + \int_a^b p(t)\frac{df(t)}{dt}\,\frac{dg(t)}{dt}\, dt$$

Ahora calculemos por partes la integral

$$\int_a^b p(t)\frac{df(t)}{dt}\,\frac{dg(t)}{dt}\, dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\left[p(t)\,\frac{dg(t)}{dt}\right]\,\frac{df(t)}{dt}\, dt + \, p(t)\frac{dg(t)}{dt}\, f(t)\Big|_a^b$$

Volviendo entonces a escribir $\langle L[f]|g\rangle$

$$\langle L[f]|g\rangle = \langle f|L[g]\rangle + p(a)\left[f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right] + p(b)\left[f'(b)g(b) - f(b)g'(b)\right]$$

Tanto para condiciones de Dirichlet o Neumann tenemos

$$\langle L[f]|g\rangle = \langle f|L[g]\rangle$$

El Problema de Sturm-Liouville Desarrollo en Autofunciones

- Propiedades del Operador de Sturm-Liouville
- Teorema de Sturm-Liouville
- Ejemplos de ecuaciones de Sturm-Liouville
- El problema no homogéneo: Función de Green
- Construcción de la Función de Green
- Desarrollo de la Función de Green en autofunciones

Como el operador de Sturm-Liouville es Hermítico, tenemos que (repasar Algebra Lineal)

- Los autovalores son reales
- Autofunciones asociadas a distintos autovalores son ortogonales

Desarrollos en Funciones Ortogonales

Como consecuencia de las propiedades en tanto operador Hermítico, cualquier función definida en el intervalo de la ecuación diferencial admitirá un desarrollo análogo al obtenido para el caso de las series de Fourier, en autofunciones del operador

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

Propiedad Espectral del Operador de Sturm-Liouville. Teorema de Sturm-Liouville

Definición.(*Problema Coercivo*). *Un problema de Sturm-Liouville se dice coercivo si existe un* $\alpha_0 \in \mathcal{R}$ *tal que*

$$\langle L[y]|y\rangle \geq \alpha_0 \left(||y|| + ||y'||\right)^2$$

Asimismo, el problema se llama casi-coercivo si existe un $\mu \in \mathcal{R}$ *tal que el operador* $L - \mu\, r(x)$ *es coercivo*

Teorema.(*Sturm-Liouville*). *Dado un problema de Sturm-Liouville regular y casi-coercivo, se tiene:*

- *El conjunto de autovalores es numerable y ordenado*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty\right)$$

- *El conjunto de autofunciones es completo, es decir es base.*
- *Cada autofunción asociada a* λ_k *posee* $k-1$ *ceros en el intevalo de definición del problema*

Veamos algunos ejemplos de problemas de Sturm-Liouville

1. Ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell(x)\right]+\ell(\ell+1)P_\ell(x)=0$$

2. Ecuación de Bessel

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2 x^2-\nu^2)y=0$$

Puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda^2 x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0$$

El problema no homogeneo. La función de Green

Consideremos el problema no homogeneo definido en el intervalo $[a, b]$

$$L[y] = f(x)$$

Para resolver este problema se define la **Función de Green,** $G(x, x')$ a través de la relación

$$L[G(x, x')] = \delta(x - x')$$

la cual satisface las condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann o la más general de las condiciones, la de Robin

$$c_a\, G(a, x') + d_a\, \frac{\partial G}{\partial x}(a, x') = 0$$
$$c_b\, G(b, x') + d_b\, \frac{\partial G}{\partial x}(b, x') = 0$$

La Solución del Problema Inhomogéneo

Teorema.
i) La solución del problema inhomogéneo existe si y sólo si la única solución del problema homogéneo con las condiciones de contorno de Robin es la solución trivial.
ii) El en caso del inciso i), la solución del problema inhomogéneo viene dada por

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')\, f(x')\, dx'$$

apliquemosle el operador

$$L[y] = \int_a^b \underbrace{L[G(x, x')]}_{\text{L actúa en la variable x}} f(x')\, dx' = \int_a^b \delta(x - x')\, f(x')\, dx' = f(x)$$

solución de la ecuación!. Además, satisface las condiciones de contorno (ya que $G(x, x')$ las satisface

Construcción de la Función de Green

1. Existen funciones y_1 e y_2 que satisfacen

$$\begin{aligned} c_a\, y_1(a) + d_a\, y_1'(a) &= 0 \\ c_b\, y_2(b) + d_b\, y_2'(b) &= 0 \end{aligned}$$

Esto se cumple, debido al teorema de existencia y unicididad, existen funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$, linealmente independientes definidas a través del problema de Cauchy $L[u_1] = 0$ con valores u_1 y u_1' en a y u_2 y u_2' en b

2. Podemos definir $G(x, x')$

$$G(x, x') = \begin{cases} c_1(x')\, y_1(x) & a \leq x < x' \\ c_2(x')\, y_2(x) & x' < x \leq b \end{cases}$$

Esta función satisface $L[G(x, x')] = 0$ (para menores y mayores estrictos de x') y satisface las condiciones de contorno.

Además, como queremos que sea efectivamente la función de Green, debe satisfacer

$$L[G(x,x')] = \delta(x-x')$$

Entonces, integrando entre a y b con respecto a x tenemos

$$\int_a^b L[G(x,x')]\,dx = \int_a^b \delta(x-x')\,dx = 1$$

$\left(\int_a^b \delta(x-x')\,dx' = \int_a^b \delta(x-x')\,dx = 1\right)$ Separando la integral de la forma $\int_a^b = \int_a^{x'-\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \int_{x'+\varepsilon}^b$ y dado que la función de Green satisface $L[G(x,x')] = 0$ para x mayor estricto o menor estricto a x' solo debemos calcular la integral

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} L[G(x,x')]\,dx = 1$$

Aplicando el operador L a $G(x,x')$ e integrando, tenemos

$$-\left[p(x)\frac{G(x,x')}{dx}(x,x')\right]_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}+\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x)\,G(x,x')\,dx=1$$

1. Debido a la continuidad de $q(x)$ y si imponemos la continuidad de $G(x,x')$ en $x=x'$ la integral se anula para $\varepsilon\to 0$

2. Para que el resultado de 1 debemos imponer una discontinuidad en la derivada de G en $x=x'$ cuyo salto sea $-1/p(x')$ es decir, la diferencia de las derivadas laterales sea $-1/p(x')$ (esto implica que la derivada sea la función de Heaviside, más un término continuo)
Entonces, por cómo propusimos la función de Green, $c_1(x')$ y $c_2(x')$ se obtienen a partir de

$$c_2(x')\,y_2(x')-c_1(x')\,y_1(x')=0 \qquad (\text{continuidad en } x=x')$$

$$c_2(x')\,y_2'(x')-c_1(x')\,y_1'(x')=-\frac{1}{p(x')} \qquad (\text{discontinuidad en } x=x')$$

La expresión de la Función de Green

Con las condiciones impuestas, la expresión de la función de Green será

$$G(x,x') = \begin{cases} -\frac{y_1(x)\,y_2(x')}{p(x')W(x')} & a \leq x < x' \\ \\ -\frac{y_2(x)\,y_1(x')}{p(x')W(x')} & x' \leq x \leq b \end{cases}$$

donde

$$W(x') = y_1(x')\,y_2'(x) - y_1'(x')\,y_2(x)$$

Ejemplo. Obtener la función de Green para el problema

$$y'' + \omega^2\,y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Desarrollo de la Función de Green en autofunciones

Dada la base de autofunciones, se puede demostrar que la función de Green para el problema de Sturm-Liouville se puede desarrollar

$$G(x, x') = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\ell} \, w_\ell(x) \, w_\ell(x')$$

Donde las funciones $w_\ell(x)$ son autofunciones del operador de Sturm-Liouville, normalizadas

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Bravo Yuste, Santos: *Métodos Matemáticos Avanzados para Científicos e Ingenieros*, Ed. Universidad de Extremadura (2006)
- Naón, Carlos; Rossignoli, Raúl; Santangelo, Eve *Ecuaciones Diferencial en Física*, Ed. EDULP (2014)
- Albo Carlos Cavalheiro, *O Problema de Sturm-Liouville* Minicurso II Colóquio de Matemática da Região Sul. Universidade Estadual de Londrina, Brasil (`http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-2.01.pdf`)