Matemática Avanzada

Clase Nro. 2

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Sea la transformación lineal $T : V \to W$. Sean $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ bases de V y W, respectivamente.
Recordemos que la matriz asociada a la transformación lineal T se obtiene aplicando la transformación a cada elemento de la base $\mathcal{B}_V$, escribiéndolo como combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}_W$ y encolumnando las coordenadas obtenidas, ya que

$$T(\mathbf{v}_\mu) = [T]^\nu_\mu \, \mathbf{w}_\nu$$

Recordemos

Una matriz cuyos elementos los denotamos a^i_j el supraíndice indica la fila y el subíndice indica la columna.

Un ejemplo completo

Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ definida explícitamente por

$$T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (2a - b, b - c, 2c - d)$$

Hallar la matriz asociada a la transformación en la base canónica para cada espacio.

- $T\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = (2, 0, 0) = 2(1, 0, 0)$
- $T\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = (-1, 1, 0) = -1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0)$
- $T\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = (0, -1, 2) = -1(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$
- $T\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = (0, 0, -1) = -1(0, 0, 1)$

Ejemplo (*continuación*)

Entonces, al aplicar la transformación y al expresar cada transformado como combinación lineal de los elementos de la base, obtenemos que la matriz asociada es

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Recordemos

Las columnas de la matriz asociadas las obtenemos aplicando la transformación a cada elemento de la base del espacio de partida, escribiendo cada resultado como combinación de elementos de la base del espacio de llegada y encolumnándolos.

Sea T una trans. lineal. Sea $[T]_{\mathcal{B}_W\mathcal{B}_V}$ la matriz asociada a las bases. Sea Λ^{ν}_{μ} la matriz de cambio de base en V (que relaciona la base $\mathcal{B}_V$ con $\mathcal{B}'_V$) y Ξ^{β}_{α} la matriz de cambio de base en W (en el espacio W)

La matriz en las nuevas bases

En las nuevas bases, la matriz asociada $[T]_{\mathcal{B}'_W\mathcal{B}'_V}$ se escribe

$$[T]_{\mathcal{B}'_W\mathcal{B}'_V} = \mathbf{\Xi}^{-1}\,[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}_W\mathcal{B}_V}\,\mathbf{\Lambda}$$

Esto es así porque, si $\vec{v} = x^{\mu}\mathbf{v}_{\mu}$ y $\vec{w} = y^{\mu}\mathbf{w}_{\mu}$

- $x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x'^{\nu}$
- $y'^{\alpha} = [\Xi^{-1}]^{\mu}_{\nu} y^{\nu}$

Teorema. De la dimensión para transformaciones lineales

Sea $T : V \to W$, T lineal, donde $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$. Entonces

$$dim[Nu(T)] + dim[Im(T)] = dim(V)$$

Demostración

- Como sabemos, el núcleo es un subespacio de V. Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\}$ una base del núcleo.
- Podemos incorporar a esta base $n - p$ elementos y formar una base de V. Entonces podemos considerar

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \mathbf{e}_{p+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

- Finalmente, se puede demostrar que $\{T(\mathbf{e}_{p+1}), T(\mathbf{e}_{p+2}), \ldots, T(\mathbf{e}_n)\}$ es base de la imagen. $\square$

Operaciones entre transformaciones lineales

Sea $L(V, W) = \{T,\ T : V \to W \ \text{lineal}\}$. Sean T_1 y T_2 dos transformaciones lineales en $L(V, W)$ Definimos las operaciones

- $(T_1 \oplus T_2)(\vec{v}) = T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v})$ (suma en W)
- $(\lambda \cdot T)(\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$ (producto en W)

Con estas operaciones definidas de esta manera, $L(v, W)$ *es un espacio vectorial*. Más aún, la dimensión de este espacio es $n \times m$, donde n es la dimensión de V y m es la dimensión de W.

La demostración es del tipo constructiva y puede verse en el apunte.

Funcionales Lineales. El espacio dual

Definición.

Una funcional lineal es una transformación que aplica un vector de un espacio vectorial en un elemento del cuerpo numérico

Como el espacio codominio tiene dimensión 1, entonces el espacio de las funcionales lineales tiene la misma dimensión que el espacio vectorial V.

Ejemplo

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = a\,x + b\,y + c\,z$$

Es una funcional lineal

El espacio dual V^*

Definición

Dado un espacio vectorial V, de dimensión n. El espacio de las funcionales lineales, denotado V^* se lo denomina *espacio dual* de V y su dimensión es n.

De entre las infinitas bases posibles para este espacio, vamos a definir *la base dual* a partir de la base del espacio:

Base dual

Dada la base para V, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$. Vamos a definir la base dual, $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{dx^1}, \mathbf{dx^2}, \ldots, \mathbf{dx^n}\}$ a partir de la condición

$$\mathbf{dx}^{\mu}(\mathbf{e}_{\nu}) = \delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

Observaciones y pistas

- Las funcionales lineales siempre se escriben como una combinación lineal de las componentes de los vectores del espacio.
- Si V es $\mathbb{R}^4$ cuyos elementos son (x, y, z, w) una funcional lineal tiene como forma general

$$f(x, y, z, w) = a\,x + b\,y + c\,z + d\,w,$$

  donde a, b, c, d pueden ser nulos.
- Si V es el espacio de matrices cuadradas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una funcional lineal tiene la forma

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \alpha\,a + \beta\,b + \gamma\,c + \delta\,d$$

Elementos del Espacio V y del dual, V^*

Dado un espacio vectorial V, con base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$, está compuesto de elementos, que llamamos vectores y denotamos

$$\vec{v} = x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}, \qquad x^{\mu} \text{ son las coordenadas!}$$

Los elementos de V^*, por su parte se escriben como

$$f = f_{\nu}\,\mathbf{dx}^{\nu}, \qquad f_{\nu} \text{ son las coordenadas!}$$

Notemos que

- $\mathbf{dx}^{\alpha}(\vec{v}) = x^{\alpha}$, entonces, $\vec{v} = \mathbf{dx}^{\mu}(\vec{v})\,\mathbf{e}_{\mu}$
- $f(\mathbf{e}_{\beta}) = f_{\beta}$, entonces, $\quad f = f(\mathbf{e}_{\nu})\,\mathbf{dx}^{\nu}$

Funciones Coordenadas

Es por esta propiedad que la base dual son llamadas también funciones coordenadas