# Matemática Avanzada

# Clase Nro. 19

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

# Ecuaciones de 2do Orden

# con

# Coeficientes Variables

- Definición de Punto Ordinario
- Soluciones en Serie. Análisis de Convergencia
- Definición de Puntos Singulares Regulares.
- Ecuación de Euler.

# Punto Ordinario. Definición

**Definición. Punto Ordinario.** *Dada una ecuación diferencial de la forma*

$$y^{(n)}(x) + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + \frac{a_0(x)}{a_n(x)}\, y(x) \;=\; 0$$

*Diremos que* *$x_0$ es un punto ordinario* *si y sólo si* *las funciones*

$$\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)},\ \frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)},\ldots,\ \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$$

*son analíticas en $x_0$.*

La solución analítica será buscada en serie

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, x^j$$

La convergencia de las series está garantizada por la analiticidad de los coeficientes

# Soluciones en Series

La solución de la ecuación diferencial la buscamos proponiendo una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_j \, x^{\ell}$$

Si $x_0$ es un punto ordinario, buscaremos la solución mediante

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \, (x - x_0)^{\ell} \\
y'(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \, c_\ell \, (x - x_0)^{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1) \, c_{\ell+1} \, (x - x_0)^{\ell} \\
y''(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \, (\ell - 1) \, c_\ell \, (x - x_0)^{\ell-2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 2) \, (\ell + 1) \, c_{\ell+2} \, (x - x_0)^{\ell}
\end{aligned}$$

Será necesario siempre el arreglo de coeficientes y ordenamiento en potencias de $x$

# Intervalo de Convergencia

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$$

para la cual, $x_0$ es un punto ordinario.
Tendremos una solución en serie,

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell\,(x - x_0)^\ell$$

**Dónde esperamos convergencia de esta serie?**

**Hay que pensar en el plano complejo, no en la recta real**

El radio de convergencia de la serie será

$$|x - x_0| < \rho$$

donde $\rho$ es la distancia a la singularidad más próxima (en el plano complejo!)

# Ejemplo

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(x) + \frac{1}{1+x^2}\, y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = 0$$

Notemos que $x_0 = \frac{1}{2}$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial.
El desarrollo

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \left(x - \frac{1}{2}\right)^\ell$$

Teniendo en cuenta que los puntos de singularidad son $x = 1/2$ y $x = \pm i$ debemos calcular la distancia entre $x = 1/2$ (**en complejos!**) y el mínimo será el radio de convergencia del desarrollo.
Tenemos que $\rho_1 = \frac{1}{2}$ (distancia de $x = 1/2$ a $x = 0$) y $\rho_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (distancia de $x = 1/2$ a $x = \pm i$). Entonces, como $\rho_1 < \rho_2$ la solución en serie tendrá un radio de convergencia

$$|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$$

# Ejemplo

Busquemos una solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$y''(x) + y(x) = 0$$

$$y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \, x^\ell \quad \rightarrow \quad y''(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1) c_{\ell+2} \, x^\ell$$

Al reemplazar en la ecuación y agrupando, obtenemos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ (\ell+2)(\ell+1) c_{\ell+2} + c_\ell \right\} x^\ell = 0$$

Genera la recurrencia

$$c_{\ell+2} = \frac{-1}{(\ell+2)(\ell+1)} \Longrightarrow c_{2j} = c_0 \frac{(-1)^j}{(2j)!} \quad \text{y} \quad c_{2j+1} = c_1 \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}$$

Entonces

$$y(x) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} + c_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = c_0 \cos(x) + c_1 \sin(x)$$

**Definición. Punto Singular Regular.** *Dada una ecuación diferencial de segundo orden de la forma*

$$P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) \;=\; 0$$

*Diremos que $x_0$ es un punto singular regular si y sólo si las funciones*

$$(x - x_0)\, \frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad y \qquad (x - x_0)^2\, \frac{R(x)}{P(x)}$$

*son analíticas en $x_0$.*

La definición no es caprichosa, sino que estará relacionada con la *Ecuación de Euler*

# Ecuación de Euler

Consideremos la ecuación diferencial

$$x^2\, y''(x) + \alpha\, x\, y'(x) + \beta\, y(x) \;=\; 0$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son números reales.
Notemos que para esta ecuación, $P(x) = x^2$, $Q(x) = \alpha x$ y $R(x) = \beta$.
Además, $x = 0$ es un punto singular regular
Fijemonos que la ecuación de Euler es satisfecha por una función potencial, ya que si proponemos $y(x) = x^r$

- $x^2\, y''(x) = r\,(r-1)x^r$
- $\alpha\, x\, y'(x) = \alpha\, r\, x^r$
- $\beta\, y(x) = \beta\, x^r$

Con lo cual, al reemplazar en la ecuación diferencial, nos queda

$$\left[r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta\right] x^r = 0$$

Entonces, la potencia la obtenemos resolviendo la **Ecuación Indicial**

$$r^2 + (\alpha - 1)\, r + \beta = 0$$

# Soluciones posibles

La ecuación indicial, pensada en el campo de los complejos, admite como posibilidades:

- $r_1 \neq r_2$
- $r_1 = r_2$

Caso $r_1 \neq r_2$

Para este caso, la solución general de la ecuación de Euler, será

$$y(x) = a_1 \, x^{r_1} + a_2 \, x^{r_2}$$

Caso $r_1 = r_2$

Al tener la ecuación indicial dos raíces iguales, el polinomio se puede escribir $(r - r_1)^2$. Entonces al sustituir en la ecuación diferencial, tenemos

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \, \frac{d}{dx} + \beta\right] x^r = (r - r_1)^2 \, x^r$$

que vale cero al evaluar en $r = r_1$

# Búsqueda de la solución Linealmente Independiente

En notación de operadores,

$$L : \frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta \implies L[x^r] = (r - r_1)^2 r^r$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \{L[x^r]\} = L \left\{ \frac{\partial x^r}{\partial r} \right\}$$

Entonces, como

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ (r - r_1)^2 x^{r_1} \right] = 2(r - r_1) x^r + (r - r_1)^2 x^r \ln(|x|)$$

tenemos

$$2(r - r_1) x^r + (r - r_1)^2 x^r \ln(|x|) = L[x^r \ \ln(|x|)]$$

que será cero en $r = r_1$ Entonces, las solución general es

$$y(x) = c_1 \, x^{r_1} + c_2 \, x^{r_1} \ \ln |x^{r_1}|$$

# Método de Frobenius

- Método de Frobenius
- Construcción de Soluciones
  - Ecuación Indicial con raíces distintas con diferencia no entera
  - Ecuación Indicial con raíces iguales
  - Ecuación Indicial con raíces distintas con diferencia entera
- Punto en el Infinito

# Método de Frobenius

Consideremos ahora, una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$P(x)\,y''(x) + Q(x)\,y'(x) + R(x)\,y(x) \;=\; 0$$

Si $x_0$ es un punto singular regular. Dividiendo a ambos miembros por $P(x)$ y multiplicando a ambos miembros por $x^2$ obtenemos

$$x^2\,y''(x) + x^2\,\frac{Q(x)}{P(x)}\,y'(x) + x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\,y(x) = 0$$

o equivalentemente

$$x^2\,y''(x) + x\,\left[x\,\frac{Q(x)}{P(x)}\right]\,y'(x) + \left[x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\right]\,y(x) = 0$$

Como $x_0$ es un punto singular regular, $\left[x\,\frac{Q(x)}{P(x)}\right]$ y $\left[x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\right]$ son analíticas, por lo que tenemos para ambas funciones desarrollo de Taylor

# Desarrollos

Para las funciones entre corchetes tenemos series de Taylor convergentes alrededor de $x = 0$,

$$\left[x\,\frac{Q(x)}{P(x)}\right] = \alpha_0 + \alpha_1\,x + \alpha_2\,x^2 + \alpha_3\,x^3 + \cdots$$

$$\left[x^2\,\frac{R(x)}{P(x)}\right] = \beta_0 + \beta_1\,x + \beta_2\,x^2 + \beta_3\,x^3 + \cdots$$

Si reemplazamos estas expresiones en la ecuación diferencial, tenemos

$$x^2\,y''(x) + x\,\left[\alpha_0 + \alpha_1\,x + \alpha_2\,x^2 + \cdots\right] y'(x) + \left[\beta_0 + \beta_1\,x + \beta_2\,x^2 + \cdots\right] y(x) = 0$$

distribuyendo el primer término

$$x^2\,y''(x) + \alpha_0\,x\,y'(x) + x\,\left[\alpha_1\,x + \alpha_2\,x^2 + \cdots\right] y'(x) + \beta_0\,y(x) + \left[\beta_1\,x + \beta_2\,x^2 + \cdots\right] y(x) = 0$$

Reagrupando, tenemos

$$\underbrace{x^2\,y''(x) + \alpha_0\,x\,y'(x) + \beta_0\,y(x)}_{Euler} + \left[\alpha_1\,x + \alpha_2\,x^2 + \cdots\right]\,y'(x) + \left[\beta_1\,x + \beta_2\,x^2 + \cdots\right]\,y(x) = 0$$

El hecho de que un primer término sea la ecuación de Euler, sugiere y motiva a buscar soluciones en serie para la ecuación diferencial (ahora, la completa) en la forma

$$y(x) = x^r \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \, x^\ell$$

donde $r$ sea solución de la ecuación indicial $r^2 + (\alpha_0 - 1)\, r + \beta_0$

**Casos Posibles. Soluciones Generales**

**Caso $r_1 \neq r_2$, $r_1 - r_2 \notin \mathcal{Z}$**

$$y(x) = \lambda_1 \, x^{r_1} \left[ 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_1)} \, x^\ell \right] + \lambda_2 \, x^{r_2} \left[ 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_2)} \, x^\ell \right]$$

donde los coeficientes $c_\ell^{(r_{1,2})}$ se obtienen a partir de la expresión, para $c_0^{(r_{1,2})} = 1$

$$c_\ell^{(r_{1,2})} = -\frac{1}{p(\ell + r_{1,2})} \sum_{j=1}^{\ell} c_{\ell-j}^{(r_{1,2})} \left[ \alpha_j \, (\ell + r_{1,2} - j) + \beta_j \right], \qquad \text{p es el polinomio indicial} \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

**Caso** $r_1 = r_2$

Para este caso, notemos primero que $L[y_r(x)] = p(r)\, x^r = (r - r_1)^2\, x^r$ Con lo cual, tendremos que

$$L\left[\frac{\partial y_r(r)}{\partial r}\right]\bigg|_{r=r_1} = 0$$

Entonces, la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = x^{r_1}\left\{\ln|x|\left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell^{(r_1)}\, x^\ell\right] + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{dc_\ell^{(r_1)}}{dr_1}\right\}$$

**Caso** $r_1 - r_2 \in \mathcal{Z}$

$$y(x) = y_{r_2}(x)\,[\lambda_2 + \lambda_1\, \ln|x|] + x^{r_1}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{dc_\ell(r_1)}{dr} x^\ell$$

con $\lambda_1$ y $\lambda_2$ constantes arbitrarias.

Este caso requiere un análisis minucioso respecto a los coeficientes (ver Miloni, 2015)

# Punto en el infinito

Estudiemos la ecuación diferencial

$$P(x)\,y''(x) + Q(x)\,y'(x) + R(x)\,y(x) = 0$$

pero en la variable $\zeta = \frac{1}{x}$
Para que el punto en el infinito sea un punto singular regular, es equivalente a que $\zeta = 0$. La condición será que

$$\frac{1}{\overline{P}(\zeta)}\left[\frac{2}{\zeta^2}\,\overline{P}(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\,\overline{Q}(\zeta)\right] \quad y \quad \frac{1}{\zeta^2}\frac{\overline{R}(\zeta)}{\overline{P}(\zeta)}$$

sean analíticas en $\zeta = 0$

# Bibliografía Utilizada y Recomendada


- Miloni, Octavio. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ecuaciones de Segundo Orden con Coeficientes Variables* . http://fcaglp.unlp.edu.ar/ nmaffione/Mat-Esp-II/pdfs/ec-diff-coef-variables-func-especiales.pdf. (2015)
- Capelas de Oliveira, Edmundo. *Funções Especiais com Aplicações*, Ed. Livraria da Física. (2005)
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. *Modern Analysis*, Ed. Cambridge University Press (1952)