Matemática Avanzada

Clase Nro. 18

Octavio Miloni

Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - Universidad Nacional de La Plata

Transformada de Laplace
Definiciones y Propiedades

- Transformaciones Integrales
- Definición de Transformada de Laplace
- Ejemplos
- Funciones de Orden Exponencial
- Propiedades
- Función de Heaviside o escalón $\mu_{t_0}(t)$
- Función Gamma $\Gamma(x)$

Definición. *Transformación Integral. Dada una función $f(t)$, y una función de dos variables $K(s,t)$, la operación*

$$\int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt$$

define una transfomación integral de $f(t)$, esto es

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt$$

En particular, vamos a considerar transformaciones integrales de la forma

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty K(s,t)\, f(t)\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b K(s,t)\, f(t)\, dt$$

cuando la integral sea convergente

Transformada de Laplace

Definición. *Sea $f(t)$ definida en la recta real positiva. La Transformada de Laplace de $f(t)$ está definida como*

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\,t} f(t)\,dt$$

siempre y cuando la integral sea convergente

Ejemplos

- $$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$
- $$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$
- $$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$
- $$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Funciones de Orden Exponencial

Definición. *Una función f es de orden exponencial si existen constantes positivas α, M y T tales que*

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha\, t}, \qquad para \quad t \geq T$$

Ejemplos

- $$|t| \leq e^{t}$$
- $$|a\, t + b| \leq |a|\, |t| + |b| \leq (|a| + |b|)\, e^{t}$$
- $$|A \cos(\omega\, t)| \leq |A|\, e^{t}$$

Para la determinación de la condición es de utilidad graficar las funciones

Las funciones de orden exponencial tienen transformada de Laplace

Llamando $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, se cumple:

- Linealidad:

  $$\mathcal{L}[\lambda\, f + g] = \lambda\, F(s) + G(s)$$

- Teorema de Traslación en el eje s:

  $$\mathcal{L}[f(t)\, e^{at}] = F(s - a)$$

- Transformada de una derivada:

  $$\mathcal{L}[f'(t)] = s\, F(s) - f(0)$$

  Soporte para aplicar a PVI

- Transformada de una derivada n-ésima:

  $$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\, F(s) - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

- Derivada n-ésima de una Transformada:

  $$\mathcal{L}[t^n\, f(t)] = (-1)^n\, F^{(n)}(s)$$

Función de Heaviside o *escalón*

Definición. *La función escalón o de Heaviside está definida como*

$$u_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Notemos que la función $u_{t_0}(t)$ modeliza un **encendido abrupto** en $t = t_0$

Notemos además que la función $1 - u_{t_0}(t)$ modeliza un **apagado abrupto** abrupto en $t = t_0$

Ejercitación: Construir una función *pulso rectangular* y una *función escalera* usando las funciones de Heaviside

Teorema de Traslación temporal

$$\mathcal{L}[u_{t_0}(t)\, f(t - t_0)] = e^{-t_0\, s}\, F(s)$$

Función $\Gamma(x)$

La función $\Gamma(x)$ está definida, para $x > 0$, a través de

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \int_0^\infty t^{\mathbf{x}-1} e^{-t} \, dt$$

Integrando por partes, podemos demostrar que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
Entonces, como $\Gamma(1) = 1$ tenemos que para x es natural,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Propiedades

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma''(x) > 0$. (Donde tiene aprox. su mínimo? Graficar para ver)
- $\Gamma(p) = s^{p+1} \, \mathcal{L}[t^p], \qquad \forall p > -1, \; p \in \mathcal{R}$

Transformada de Laplace Convolución y Aplicaciones

- Distribución Delta de Dirac $\delta(t - t_0)$
- Producto de Convolución
- Propiedades
- Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Lineales
- Aplicaciones a las Ecuaciones Integro-Diferenciales

La *Delta de Dirac* $\delta(t - t_0)$

Construcción por aproximación

Consideremos el siguiente pulso rectangular

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left[\mu_{t_0-\varepsilon}(t) - \mu_{t_0+\varepsilon}(t)\right]$$

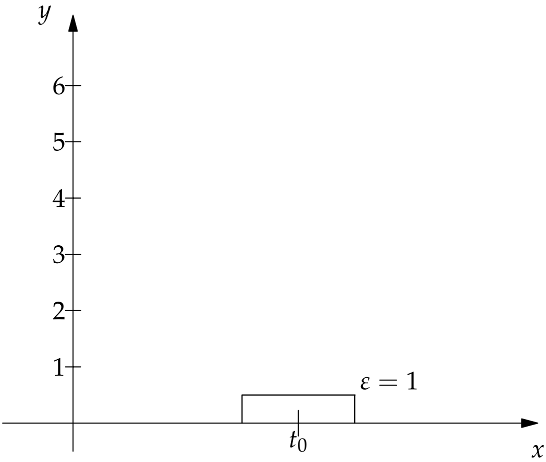
Grafiquemos esta función para diferentes valores de ε
Vamos a definir la *distribución $\delta(t - t_0)$, Delta de Dirac* al límite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\left[\mu_{t_0-\varepsilon}(t) - \mu_{t_0+\varepsilon}(t)\right]$$

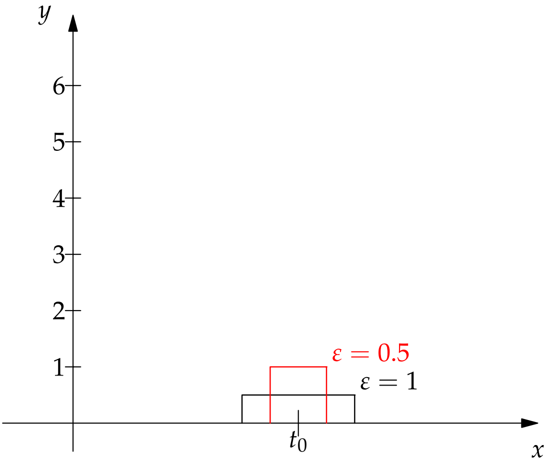
En virtud de cómo está definida, es un impulto infinito e instantáneo!

Veamos algunos gráficos de aproximaciones

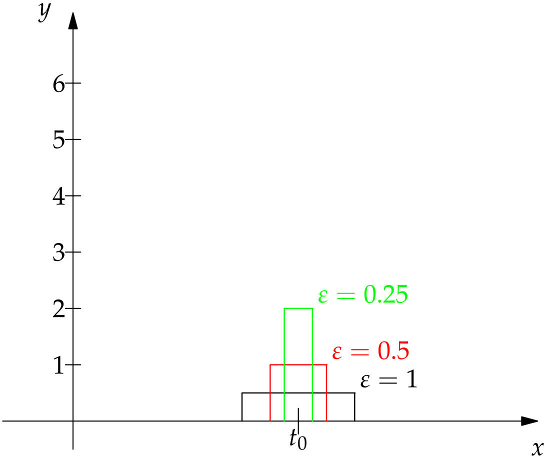
aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



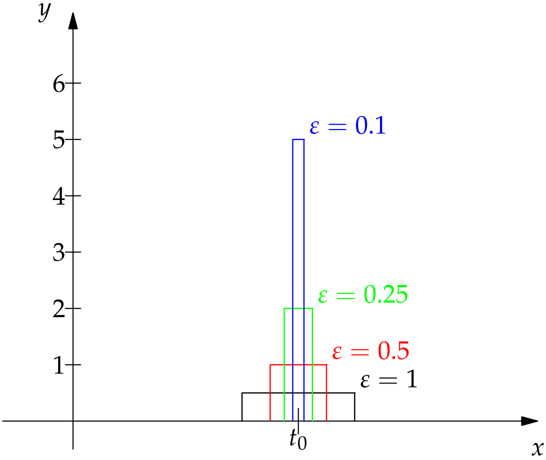
aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



aproximaciones de la $\delta(t - t_0)$



Algunas Propiedades

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0)$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, f(t)\, dt = f(0)$$

- $$\mathcal{L}[\delta(t - t_0))] = e^{-t_0 s}$$

- $$\mathcal{L}[\delta(t))] = 1$$

Convolución. Definición

Definición. *Dadas las funciones f y g (en principio definidas en toda la recta real) se define la convolución entre f y g a través de*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) g(t-\eta) d\eta$$

En el contexto de la Transformada de Laplace, donde las funciones están definidas para los reales positivos, tendremos

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\eta) g(t-\eta) d\eta$$

Una interpretación física: *Si $f(\eta)$ es un estímulo en η y $g(t-\eta)$ es la respuesta en t a un estímulo en η la convolución es la "suma" de todas las respuestas a ese estímulo.*

Ejemplo: El potencial gravitatorio,

$$\phi(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{R}^3} \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy' dz' = -G \left(\rho * \frac{1}{\mathbf{r}} \right) (\mathbf{r})$$

Propiedades de la Convolución

- Conmutatividad

$$f * g = g * f$$

- Asociatividad

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

- Distributividad

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

- Asociatividad con estalar

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

- Regla de Derivación

$$D(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * Dg, \quad \text{donde } D \text{ es un operador diferencial}$$

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ se tiene

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)G(s)$$

El producto de transformadas es el producto en $\mathcal{R}$
Idea de la Demostración. Calculemos la transformadad de Laplace

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\eta) g(t - \eta) d\eta \right] e^{-st} \, dt$$

Transformamos a una integral doble en la región (graficar para ver) del plano $t\,\eta$ descripta por las relaciones $0 \leq \eta \leq t, \quad 0 \leq t < \infty$
La región se puede parametrizar también como $\eta \leq t < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty$
Finalmente, haciendo el cambio de variable $u = t - \eta$ y agrupando se demuestra la propiedad

Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Lineales

A partir de las propiedades de la Transformada de Laplace, principalmente en lo que respecta a las transformadas de derivadas podemos resolver problemas de valor inicial.
Dado el problema de valor inicial de segundo orden

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = f(t), \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

Calculando la transformada de Laplace a ambos miembros, llamando $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ y $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ tendremos que el PVI lo podemos transformar

$$s^2\,X(s) - s\,x_0 - v_0 + a\,(s\,X(s) - x_0) + b\,X(s) = F(s)$$

Entonces,

$$X(s) = \frac{F(s) + x_0\,s + a\,x_0 + v_0}{s^2 + a\,s + b}$$

Antitransformando con las propiedades conocidas, obtenemos la $x(t)$

Aplicaciones a las Ecuaciones Integro-Diferenciales

De manera análoga a aplicar la transformada de Laplace para ecuaciones diferenciales, podemos aplicar a *ecuaciones integrales*

$$\phi(t) + \int_0^t K(\xi, t)\,\phi(\xi)\,d\xi = f(t)$$

o las denominadas *integro-diferenciales*

$$\phi''(t) + a\,\phi'(t) + b\,\phi(t) + d\int_0^t K(\xi, t)\,\phi(\xi)\,d\xi = f(t)$$

Ambas ecuaciones son ejemplos, no los únicos casos de aplicabilidad.
En general, si la función que aparece en el integrando es del tipo $K(t-\xi)$ podremos interpretar la integral como una convolución y aplicar transformación de Laplace, de la misma manera

Bibliografía Utilizada y Recomendada

- Kreider, Donald L. Kuller, Robert G. Ostberg, Donald R. Perkins, Fred W. *Introducción al Análisis Lineal*, Vol I Ed. Fondo Educativo Interamericano (1966)
- Zill, Dennis G. & Cullen, Michael R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, *Vol. I Ecuaciones Diferenciales* Ed. Mc Graw Hill (2006)
- Boyce, William E. & Di Prima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas de Valores en la Frontera*, 3 Edición, Ed. Limusa Noriega (1978)